

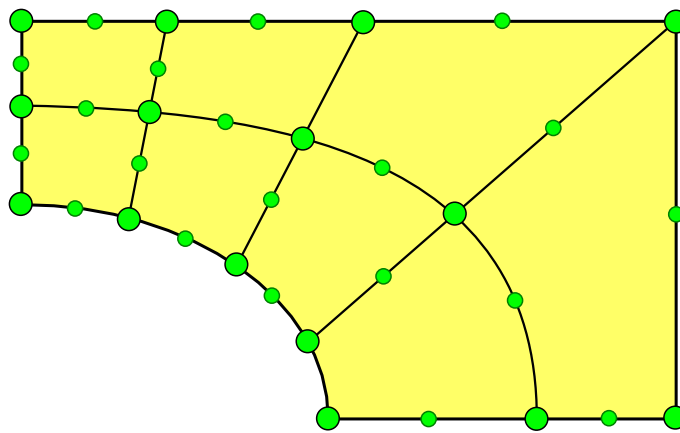
# Méthode des éléments finis : élasticité plane

Yves Debard

Université du Mans  
Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*24 mars 2006 – 29 mars 2011*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>1</b>
1.1	Hypothèse contraintes planes . . . . .	1
1.2	Hypothèse déformations planes . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Forme différentielle</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Forme intégrale faible</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Forme discrétisée : éléments finis</b>	<b>7</b>
4.1	Discrétisation du domaine : maillage . . . . .	7
4.2	Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements . . . . .	8
4.3	Représentation globale du champ de déplacements . . . . .	8
4.4	Discrétisation de la forme intégrale faible . . . . .	9
4.5	Problèmes particuliers . . . . .	10
4.5.1	Problème stationnaire . . . . .	10
4.5.2	Modes propres de vibration . . . . .	11
4.6	Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Problème élastostatique : énergie potentielle et méthode de Ritz</b>	<b>12</b>
5.1	Calcul des variations . . . . .	12
5.2	Énergie potentielle . . . . .	13
5.3	Méthode de Ritz et éléments finis . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Calculs élémentaires : éléments isoparamétriques</b>	<b>15</b>
6.1	Élément isoparamétrique : définition . . . . .	15
6.1.1	Représentation de la géométrie . . . . .	15
6.1.2	Maillage conforme . . . . .	16
6.1.3	Représentation du champ de déplacements . . . . .	16
6.2	Bibliothèque d'éléments . . . . .	17
6.2.1	Triangle à 3 nœuds . . . . .	17
6.2.2	Triangle à 6 nœuds . . . . .	18
6.2.3	Quadrangle à 4 nœuds . . . . .	19
6.2.4	Quadrangle à 8 ou 9 nœuds . . . . .	20
6.3	Calcul des matrices et des vecteurs élémentaires . . . . .	21
6.3.1	Transformation des dérivées . . . . .	21
6.3.2	Transformation des intégrales . . . . .	21
6.3.3	Évaluation numérique des intégrales . . . . .	22
6.3.4	Calcul des matrices . . . . .	23
6.3.5	Calcul des vecteurs . . . . .	23
6.4	Qualité du jacobien. . . . .	25
<b>A</b>	<b>Programmes Maple</b>	<b>27</b>
A.1	tri3_int : triangle à 3 nœuds . . . . .	27
A.2	tri6_int : triangle à 6 nœuds . . . . .	27
A.3	quad4_int : quadrangle à 4 nœuds . . . . .	28
A.4	quad8_int : quadrangle à 8 nœuds . . . . .	28
A.5	quad9_int : quadrangle à 9 nœuds . . . . .	29
A.6	Qualité du jacobien : quadrangle à 4 nœuds . . . . .	29
A.7	Qualité du jacobien : triangle à 6 nœuds . . . . .	30
	<b>Références</b>	<b>32</b>



## Introduction

Dans ce texte nous présentons la résolution d'un problème d'élasticité plane par la méthode des éléments finis.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Les déplacements et les déformations sont petits.
- Le comportement du matériau est élastique et linéaire.
- Le matériau est homogène et isotrope.  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  et  $\rho$  sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation et la masse volumique du matériau.

Le repère  $\{O; x, y, z\}$  est un repère orthonormé.  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes.

## 1 Rappels

### 1.1 Hypothèse contraintes planes

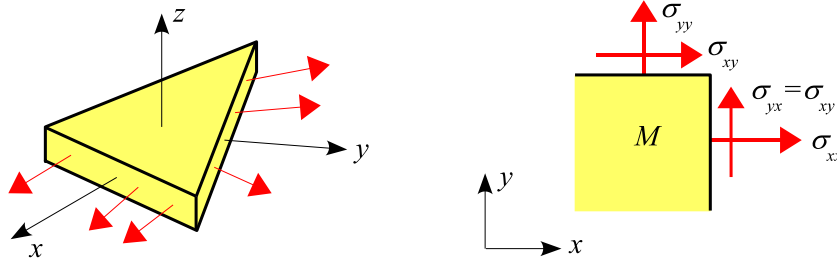


Figure 1 – *Plaque sollicitée dans son plan*

Un solide (figure 1) est en état de contraintes planes par rapport au plan  $\{O; x, y\}$ , s'il existe un repère  $\{O; x, y, z\}$ , tel qu'en tout point  $M$  du solide, le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{matrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1.1)$$

où  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  sont indépendants de  $z$ . L'axe  $\vec{k}$  est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

Dans la formule (1.1),  $\vec{T}(M, \vec{n})$  est le vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$ .

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T \quad (1.2)$$

où  $\Delta T$  est la variation de température.

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (1.3)$$

où :

–  $\{\varepsilon\}$  est le vecteur déformation :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

La figure (2) montre la signification des composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  du tenseur des déformations.

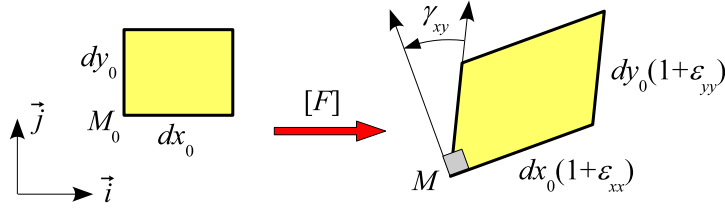


Figure 2 – Transformation d'un rectangle infiniment petit

–  $\{\sigma\}$  est le vecteur contrainte :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

–  $[D]$  est la matrice des coefficients élastiques :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

–  $\{\varepsilon_{th}\}$  représente les déformations d'origine thermique :

$$\{\varepsilon_{th}\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements suivant  $x$  et  $y$  :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

## 1.2 Hypothèse déformations planes

Un solide est en état de déformations planes par rapport au plan  $\{O; x, y\}$ , s'il existe un repère  $\{O; x, y, z\}$ , lié au solide, tel qu'en tout point du solide, le champ de déplacements soit de la forme :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Le tenseur des contraintes est alors de la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \alpha \Delta T \quad (1.11)$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (1.12)$$

où :

–  $\{\varepsilon\}$  est le vecteur déformation :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

–  $\{\sigma\}$  est le vecteur contrainte :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

–  $[D]$  est la matrice des coefficients élastiques :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.15)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de **Lamé** du matériau.

–  $\{\varepsilon_{th}\}$  représente les déformations d'origine thermique :

$$\{\varepsilon_{th}\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

## 2 Forme différentielle

Le solide  $V$  limité par la frontière  $S$  est soumis à :

- un champ de forces volumiques :  $\{f_V\} = \begin{Bmatrix} f_{Vx} \\ f_{Vy} \end{Bmatrix}$
- des déplacements imposés sur la frontière  $S_u$  :  $\{u_P\} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix}$
- des forces surfaciques sur la frontière :  $S_\sigma = S - S_u$  :  $\{f_\sigma\} = \begin{Bmatrix} f_{\sigma x} \\ f_{\sigma y} \end{Bmatrix}$

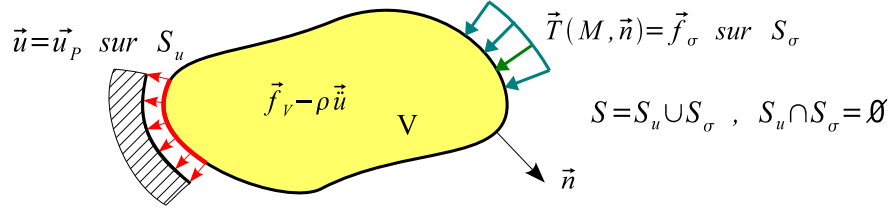


Figure 3 – Charges et conditions aux limites

Résoudre un problème d'élasticité plane consiste à chercher un champ de déplacements :

$$\{u(x, y; t)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (2.1a)$$

tel que :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_{Vx} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_{Vy} \end{cases} \quad (2.1b)$$

en tout point du solide avec :

- les relations cinématiques :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1c)$$

- la loi de comportement (ou loi constitutive) :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (2.1d)$$

- les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} \quad \text{sur } S_u, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\sigma x} \\ f_{\sigma y} \end{Bmatrix} \quad \text{sur } S_\sigma \quad (2.1e)$$

$S = S_u \cup S_\sigma, S_u \cap S_\sigma = \emptyset$

où  $S$  est la surface du solide et  $\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$  la normale unitaire à  $S$  dirigée vers l'extérieur de  $V$ .

*Remarque* : en pratique, il y a une partition de la surface  $S$  pour chaque composante du déplacement.



– les conditions initiales à l'instant  $t = t_0$  :

$$\begin{cases} u(x, y; t_0) \\ v(x, y; t_0) \end{cases} = \begin{cases} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{u}(x, y; t_0) \\ \dot{v}(x, y; t_0) \end{cases} = \begin{cases} \dot{u}_0(x, y) \\ \dot{v}_0(x, y) \end{cases} \quad (2.1f)$$

Le vecteur  $\{r\} = \begin{cases} r_x \\ r_y \end{cases}$  dont les composantes sont :

$$\begin{cases} r_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - f_{Vx} \\ r_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - f_{Vy} \end{cases} \quad (2.2)$$

est le **résidu** de l'équation (2.1). Il est nul si le champ de déplacements  $\{u(x, y; t)\} = \begin{cases} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{cases}$  est solution de cette équation.

### 3 Forme intégrale faible

Pour résoudre l'équation (2.1) par la méthode des éléments finis, nous utilisons la **méthode des résidus pondérés**. Multiplions le résidu

$$\{r\} = \begin{cases} r_x \\ r_y \end{cases} \quad (3.1)$$

par un champ de déplacements arbitraire

$$\{u^*\} = \begin{cases} u^* \\ v^* \end{cases} \quad (3.2)$$

puis intégrons sur le domaine  $V$  :

$$\mathcal{W}(u, u^*) = \int_V \{u^*\}^T \{r\} dV = \int_V (u^* r_x + v^* r_y) dV = 0 \quad \forall \{u^*\} \quad (3.3)$$

Intégrons par parties la quantité

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) u^* dV$$

puis utilisons le théorème de la divergence (ou théorème d'Ostrogradski). Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) u^* dV \\ &= \int_V \left( \frac{\partial(u^* \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u^* \sigma_{xy})}{\partial y} \right) dV - \int_V \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dV \\ &= \int_S u^* (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) dS - \int_V \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

Imposons la condition  $u^* = 0$  sur  $S_u$ . La première intégrale se réduit à :

$$\int_{S_\sigma} u^* f_{\sigma x} dS \quad (3.5)$$

De même :

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) v^* dV = \int_{S_\sigma} v^* f_{\sigma y} dS - \int_V \left( \sigma_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) dV \quad (3.6)$$

En portant les expressions (3.4), (3.5) et (3.6) dans l'équation (3.3), vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) &= \int_V \rho \{u^*\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \\ &\quad - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

où l'on a posé :

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}, \quad \{\ddot{u}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (3.8)$$

$\{\varepsilon^*\}$  est le champ de déformations virtuelles induit par le champ de déplacements virtuels  $\{u^*\}$ .

La **forme intégrale faible d'un problème d'élasticité** s'écrit finalement :

Trouver le champ de déplacements

$$\{u(x, y; t)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) &= \int_V \rho \{u^*\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \\ &\quad - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \\ &\quad \forall \{u^*\} \text{ tel que } \{u^*\} = \{0\} \text{ sur } S_u \end{aligned} \quad (3.9b)$$

où :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9c)$$

avec :

– les relations cinématiques :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9d)$$

– la loi de comportement (ou loi constitutive) :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (3.9e)$$

– les conditions aux limites :

$$\{u\} = \{u_P\} \quad \text{sur } S_u \quad (3.9f)$$

– les conditions initiales :

$$\{u(x, y; t_0)\} = \{u_0(x, y)\}, \quad \{\dot{u}(x, y; t_0)\} = \{\dot{u}_0(x, y)\}, \quad \{\dot{u}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{u\} \quad (3.9g)$$

Remarques :

- Les fonctions  $\{u\}$  et  $\{u^*\}$  doivent être suffisamment régulières pour que les expressions ci-dessus aient un sens.
- La fonction  $\{u^*\}$  est appelée **champ de déplacements virtuels**.
- Le champ de déplacements  $\{u\}$  est dit **cinématiquement admissible** (CA).
- La formulation intégrale (3.9) est l'expression du principe des travaux virtuels.
- Dans l'équation (3.3) la fonction  $\{u\}$  doit être dérivable deux fois et une fois dans l'équation (3.9). Ces équations sont dites respectivement **forme intégrale forte** et **forme intégrale faible** de l'équation différentielle (2.1).
- Sous certaines conditions de régularité, les formulations (2.1) et (3.9) sont équivalentes.

## 4 Forme discrétisée : éléments finis

La solution analytique de l'équation (3.9) est en général inaccessible. On est donc conduit à chercher une solution approchée par une méthode numérique : la méthode des éléments finis. Cette méthode est un cas particulier de la **méthode de Galerkin** : le champ de déplacements cherché  $\{u\}$  et les fonctions test  $\{u^*\}$  appartiennent au même espace de dimension finie.

### 4.1 Discrétisation du domaine : maillage

Le domaine  $V$  est décomposé en sous-domaines  $V^e$  de forme géométrique simple (les **éléments**) reliés entre eux en des points appelés **nœuds** (figure 4). Cette opération s'appelle **maillage**.

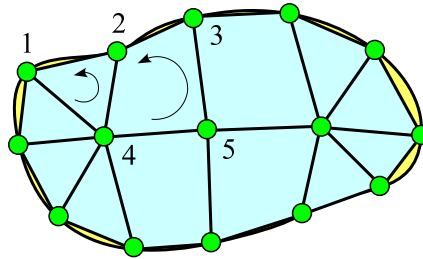


Figure 4 – *Domaine plan discrétisé en 12 éléments (8 triangles, 4 quadrangles) reliés entre eux par 15 nœuds*

Le maillage est défini par deux tables :

- La **table des nœuds** contient les coordonnées des nœuds.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	...
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	...

- La **table des éléments** contient, pour chaque élément, le type (triangle à trois nœuds, quadrangle à quatre nœuds, ...) et les numéros des nœuds dans le sens trigonométrique.

TRI3	QUAD4	...
1	4	...
4	5	...
2	3	...
—	2	...

## 4.2 Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements

Le champ déplacements dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément : l'**approximation est dite nodale**. Dans l'élément ( $e$ ) (figure 5) :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e(x, y) & 0 & \dots & N_{n^e}^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_1^e(x, y) & \dots & 0 & N_{n^e}^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e(t) \\ v_1^e(t) \\ \vdots \\ u_{n^e}^e(t) \\ v_{n^e}^e(t) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u(x, y; t)\} = \{N^e(x, y)\}^T \{u^e(t)\} \quad (4.2)$$

où

- $n^e$  est le nombre de nœuds de l'élément.
- les fonctions  $N_i^e(x, y)$  sont les **fonctions d'interpolation élémentaires**.
- la matrice  $[N^e(x, y)]$  est la matrice d'interpolation élémentaire.
- le vecteur  $\{u^e(t)\}$  regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'élément ( $e$ ).

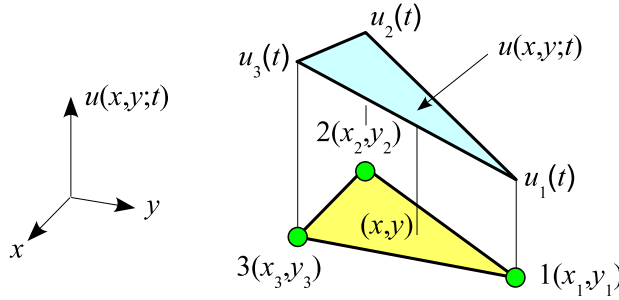


Figure 5 – Champ de déplacements dans un élément à trois nœuds

## 4.3 Représentation globale du champ de déplacements

Le champ de déplacements a pour expression sur l'ensemble du domaine  $V$  :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & \dots & N_n(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & \dots & 0 & N_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ v_n(t) \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u(x, y; t)\} = [N(x, y)] \{U(t)\} \quad (4.4)$$

où

- $n$  est le nombre de nœuds du maillage.
- les fonctions  $N_i(x, y)$  sont les **fonctions d'interpolation** (ou **fonctions de forme**).
- $[N(x, y)]$  est la **matrice d'interpolation**.
- $\{U(t)\}$  est le **vecteur des déplacements nodaux**.

#### 4.4 Discrétisation de la forme intégrale faible

De l'expression du champ de déplacements sur le domaine :

$$\{u(x, y, t)\} = [N(x, y)] \{U(t)\} \quad (4.5)$$

on déduit :

$$\{\ddot{u}\} = [N] \{\ddot{U}\} \quad (4.6a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad \text{avec} \quad [B] = [B_1 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_n] \quad , \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

$$\{u^*\} = [N] \{U^*\} \quad , \quad \{u^*\}^T = \{U^*\}^T [N]^T \quad (4.6c)$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B] \{U^*\} \quad , \quad \{\varepsilon^*\}^T = \{U^*\}^T [B]^T \quad (4.6d)$$

En portant ces relations dans l'équation (3.9b), il vient :

$$\mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) = \{U^*\}^T \left( [M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} - \{F\} \right) \quad (4.7)$$

où :

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (4.8)$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.9)$$

$$\{F\} = \int_V [N]^T \{f_V\} dV + \int_{S_\sigma} [N]^T \{f_S\} dS + \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \quad (4.10)$$

$[M]$  est la **matrice de masse** (kg).

$[K]$  est la **matrice de rigidité** (N/m).

$\{F\}$  est le **vecteur force équivalent aux charges réparties** (N).

$\{U\}$  est le **vecteur des déplacements nodaux** (m).

$\{\ddot{U}\}$  est le **vecteur des accélérations nodales** (m/s<sup>2</sup>).

*Remarques :*

- les matrices  $[M]$  et  $[K]$  sont par construction symétriques (car la matrice des coefficients élastiques  $[D]$  est symétrique).
- dans l'équation (4.7), il convient d'ajouter la contribution de l'amortissement :  $\{U^*\}^T [C] \{\dot{U}\}$  où  $[C]$  est la **matrice d'amortissement** (kg/s) et  $\{\dot{U}\}$  le **vecteur des vitesses nodales** (m/s).

Effectuons une **partition des degrés de liberté** en déplacements inconnus ( $L$ ) et imposés (non nuls :  $P$ , nuls :  $S$ ) ([1], [14], [15]) :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \neq \{0\} \\ \{U_S\} = \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U^*\} = \begin{Bmatrix} \{U_L^*\} \\ \{U_P^*\} = \{0\} \\ \{U_S^*\} = \{0\} \end{Bmatrix} = \{\delta U\} \quad (4.11a)$$

$\{\delta U\}$  est une variation quelconque du vecteur  $\{U\}$ .

Cette partition induit une partition de  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  et  $\{F\}$  :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] & [M_{LS}] \\ [M_{PL}] & [M_{PP}] & [M_{PS}] \\ [M_{SL}] & [M_{SP}] & [M_{SS}] \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] & [K_{LS}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] & [K_{PS}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] & [C_{LS}] \\ [C_{PL}] & [C_{PP}] & [C_{PS}] \\ [C_{SL}] & [C_{SP}] & [C_{SS}] \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix} \quad (4.11c)$$

La forme faible discrétisée s'écrit finalement :

Trouver  $\{U_L(t)\}$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\{U_L\}, \{U_L^*\}) = & \{U_L^*\}^T \left( [[M_{LL}] \quad [M_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_L\} \\ \{\ddot{U}_P\} \end{Bmatrix} + [[C_{LL}] \quad [C_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_L\} \\ \{\dot{U}_P\} \end{Bmatrix} \right. \\ & \left. + [[K_{LL}] \quad [K_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0 \quad \forall \{U_L^*\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec les conditions initiales  $\{U_L(t_0)\} = \{U_{L,0}\}$ ,  $\{\dot{U}_L(t_0)\} = \{\dot{U}_{L,0}\}$

Les déplacements nodaux inconnus  $\{U_L(t)\}$  sont donc les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} [M_{LL}]\{\ddot{U}_L\} + [C_{LL}]\{\dot{U}_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} \\ = \{F_L\} - [M_{LP}]\{\ddot{U}_P\} - [C_{LP}]\{\dot{U}_P\} - [K_{LP}]\{U_P\} \end{aligned} \quad (4.13a)$$

avec les conditions initiales :

$$\{U_L(t_0)\} = \{U_{L,0}\}, \quad \{\dot{U}_L(t_0)\} = \{\dot{U}_{L,0}\} \quad (4.13b)$$

*Remarque* : par construction, les matrices  $[K_{LL}]$  et  $[M_{LL}]$  sont symétriques.

## 4.5 Problèmes particuliers

### 4.5.1 Problème stationnaire

Dans un problème stationnaire, l'équation (4.13) se réduit à :

$$[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}]\{U_P\} = \{\bar{F}_L\} \quad (4.14)$$

Si le nombre de liaisons est suffisant, la matrice  $[K_{LL}]$  n'est pas singulière ( $\det[K_{LL}] \neq 0$ ) et les déplacements inconnus sont égaux à :

$$\{U_L\} = [K_{LL}]^{-1} \{\bar{F}_L\} \quad (4.15)$$

Les déplacements étant connus, les actions de liaison sont égales à :

$$\{A\} = \begin{bmatrix} [K_{PL}] & [K_{PP}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

### 4.5.2 Modes propres de vibration

Les **modes propres de vibration** de la structure sont les solutions de l'équation :

$$[M_{LL}]\{\ddot{U}_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} = 0 \quad (4.17)$$

En posant :

$$\{U_L(t)\} = \{\tilde{U}_L\} \sin \omega t \quad (4.18)$$

où  $\{\tilde{U}_L\}$  est indépendant du temps, il vient :

$$[K_{LL}]\{\tilde{U}_L\} = \omega^2 [M_{LL}]\{\tilde{U}_L\} \quad (4.19)$$

où  $\omega$  est une pulsation propre de la structure et  $\{\tilde{U}_L\}$  le vecteur propre associé.

Les pulsations propres sont les solution de l'équation :

$$\det ([K_{LL}] - \omega^2 [M_{LL}]) = 0 \quad (4.20)$$

## 4.6 Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage

Dans la pratique,  $[M]$ ,  $[K]$  et  $\{F\}$  sont construits **élément par élément**. Cette opération s'appelle **assemblage**.

De l'expression du champ de déplacements dans l'élément ( $e$ ) :

$$\{u(x, y; t)\} = [N^e(x, y)] \{u^e(t)\} \quad (4.21)$$

on déduit :

$$\{u^*\} = [N^e] \{u^{e*}\} \quad , \quad \{u^*\}^T = \{u^{e*}\}^T [N^e]^T$$

$$\{\ddot{u}\} = [N^e] \{\ddot{u}^e\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B^e] \{u^e\} \quad , \quad [B^e] = [ B_1^e \quad \dots \quad B_i^e \quad \dots \quad B_{n^e}^e ] \quad , \quad B_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B^e] \{u^{e*}\} \quad , \quad \{\varepsilon^*\}^T = \{u^{e*}\}^T [B^e]^T$$

En portant ces expressions dans l'équation (3.9b), il vient :

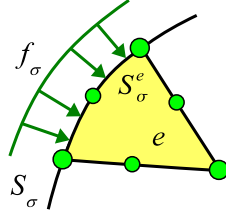
$$\mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) = \sum_e \{u^{e*}\}^T ([m^e] \{\ddot{u}^e\} + [k^e] \{u^e\} - \{f^e\}) \quad (4.23)$$

où :

$$[m^e] = \int_{V^e} \rho [N^e]^T [N^e] dV \quad (4.24)$$

$$[k^e] = \int_{V^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \quad (4.25)$$

$$\{f^e\} = \int_{V^e} [N^e]^T \{f_V\} dV + \int_{S_g^e} [N^e]^T \{f_S\} dS + \int_{V^e} [B^e]^T [D] \{\varepsilon_{ih}^e\} dV \quad (4.26)$$

Figure 6 – Élément  $e$ 

Dans ces formules,  $V^e$  représente le volume de l'élément ( $e$ ) et  $S_\sigma^e$  la partie de  $S_\sigma$  qui appartient à la frontière de l'élément ( $e$ ) (figure 6).

Les matrices et les vecteurs élémentaires sont évaluées numériquement.

L'équation (3.9b) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) &= \sum_e \{U^*\}^T \left( [M^e] \{\ddot{U}\} + [K^e] \{U\} - \{F^e\} \right) \\ &= \{U^*\}^T \left( \sum_e [M^e] \{\ddot{U}\} + \sum_e [K^e] \{U\} - \sum_e \{F^e\} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

d'où :

$$[M] = \sum_e [M^e] \quad , \quad [K] = \sum_e [K^e] \quad , \quad \{F\} = \sum_e \{F^e\} \quad (4.28)$$

Dans les matrices  $[M^e]$  et  $[K^e]$  et dans le vecteur  $\{F^e\}$ , obtenus par expansion respectivement de  $[m^e]$ ,  $[k^e]$  et  $\{f^e\}$ , les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément ( $e$ ).

*Remarques :*

- La partition des degrés de liberté est effectuée avant la phase d'assemblage.
- Dans le logiciel « **RDM** » seuls les blocs de matrice ( $LL$ ) et ( $LP$ ) sont assemblés.

## 5 Problème élastostatique : énergie potentielle et méthode de Ritz

Si le problème est indépendant du temps, la forme intégrale faible (3.9) se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) &= \int_V \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \\ &\quad - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \\ &\quad \forall \{u^*\} \text{ tel que } \{u^*\} = \{0\} \text{ sur } S_u \end{aligned} \quad (5.1)$$

### 5.1 Calcul des variations

Le problème fondamental du calcul des variations consiste à chercher la fonction  $u(x)$  qui rend stationnaire la **fonctionnelle** (ou « fonction de fonctions ») :

$$\mathcal{J}(u) = \int_a^b F \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) dx \quad (5.2)$$



ce qui s'écrit :

$$\delta \mathcal{J} = 0 \quad \forall \delta u \quad (5.3)$$

Les principales propriétés de l'opérateur variation  $\delta$  sont ([2, 9, 17]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2(u) = \delta(\delta u) = 0 \\ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ \delta F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \\ \delta(F + G) = \delta F + \delta G \\ \text{où } F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) \text{ et } G \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) \text{ sont deux fonctionnelles de } u \\ \delta(F G) = \delta F G + F \delta G \quad (\text{règle de Leibniz}) \\ \delta(F^n) = n F^{n-1} \delta F \\ \delta(c F) = c \delta F \quad \text{où } c \text{ est une constante} \\ \delta \int F dx = \int \delta F dx \end{array} \right. \quad (5.4)$$

## 5.2 Énergie potentielle

Considérons la fonctionnelle :

$$E_{\text{pot}}(\{u\}) = E_{\text{def}}(\{u\}) - W_{\text{ext}}(\{u\}) \quad (5.5)$$

où :

- $\{u\}$  est un champ de déplacements cinématiquement admissible.
- $E_{\text{def}}(\{u\})$  est l'énergie de déformation du champ de déplacements  $\{u\}$  :

$$E_{\text{def}}(\{u\}) = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \quad (5.6)$$

- $W_{\text{ext}}(\{u\})$  est travail des forces appliquées pour le déplacement  $\{u\}$  :

$$W_{\text{ext}}(\{u\}) = \int_V \{u\}^T \{f_V\} dV + \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{f_\sigma\} dS \quad (5.7)$$

- $E_{\text{pot}}(\{u\})$  est l'énergie potentielle du système pour le déplacement  $\{u\}$ .

La condition de stationnarité (5.3) s'écrit :

$$\delta E_{\text{pot}} = \delta E_{\text{def}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \{\delta u\} \quad (5.8)$$

soit :

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{pot}} = & \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \\ & - \int_V \{\delta u\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \quad \forall \{\delta u\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

- $\{\delta u\}$  est une variation quelconque du champ de déplacements (en particulier :  $\{\delta u\} = \{0\}$  sur  $S_u$ ).

$$- \{\delta \varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Cette équation est identique à (5.1) si on choisit  $\{u^*\} = \{\delta u\}$ .

La seconde variation de la fonctionnelle est égale à :

$$\delta^2 E_{\text{pot}} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\delta \varepsilon\} dV \quad (5.10)$$

La matrice  $[D]$  étant définie positive, on en déduit :

$$\delta^2 E_{\text{pot}} > 0 \quad \forall \{\delta u\} \llcorner \{0\} \quad (5.11)$$

De plus

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\} + \{\delta u\}) &= E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) + \delta E_{\text{pot}}|_{\{u\}=\{u_{\text{exact}}\}} + \frac{1}{2} \delta^2 E_{\text{pot}} \\ &= E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{\text{pot}} > E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) \quad \forall \{\delta u\} \llcorner \{0\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Le champ de déplacements  $\{u\} = \{u_{\text{exact}}\} + \{\delta u\}$  étant cinématiquement admissible (CA), on en déduit :

$$E_{\text{pot}}(\{u_{\text{CA}}\}) \geq E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) \quad \forall \{u_{\text{CA}}\} \quad (5.13)$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

**Parmi l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ de déplacements exact est celui qui minimise l'énergie potentielle.**

### 5.3 Méthode de Ritz et éléments finis

Si on restreint la recherche de la solution aux champs de déplacements définis au paragraphe (4.3), l'énergie potentielle discrétisée est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\{U\}) &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{F\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

et la condition de stationnarité s'écrit :

$$\delta E_{\text{pot}}(\{U_L\}) = \{\delta U_L\}^T \left( \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_L \\ U_P \end{Bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0 \quad \forall \{\delta U_L\} \quad (5.15)$$

d'où :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\} \quad (5.16)$$

Cette équation est identique à celle obtenue au paragraphe (4.5.1).

## 6 Calculs élémentaires : éléments isoparamétriques

### 6.1 Élément isoparamétrique : définition

À chaque élément réel, on associe un **élément de référence** (figure 7).

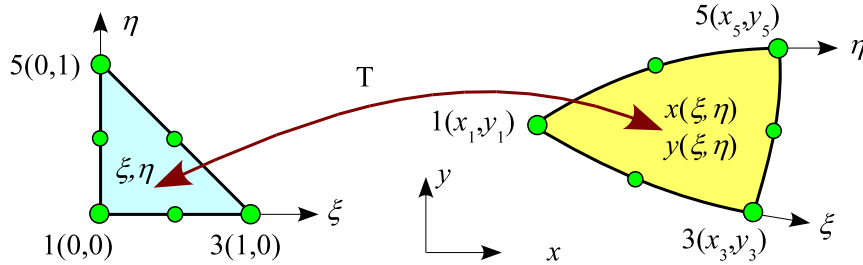


Figure 7 – Transformation géométrique

#### 6.1.1 Représentation de la géométrie

La transformation géométrique (figure 7) qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel possède les propriétés suivantes :

- elle est de la forme :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad , \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (6.1)$$

où :

- $n$  est le nombre de nœuds de l'élément.
- $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence.
- $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont les coordonnées d'un point de l'élément réel.
- $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du  $i^e$  nœud de l'élément.
- les  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme

La **matrice jacobienne** de la transformation est :

$$\begin{aligned} [J(\xi, \eta)] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

- elle est **nodale** : un nœud de l'élément de référence devient un nœud de l'élément réel (les deux éléments possèdent donc le même nombre de nœuds) :

$$x_i = x(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) x_j \quad , \quad y_i = y(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) y_j \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

où  $(\xi_i, \eta_i)$  sont les coordonnées du  $i^e$  nœud de l'élément de référence. On en déduit :

$$N_j(\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (6.4)$$

- une frontière de l'élément de référence devient une frontière de l'élément réel.
- elle est **bijective** : le **déterminant de la matrice jacobienne ne doit pas changer de signe sur l'élément**. Nous imposerons la condition :

$$\det [J(\xi, \eta)] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} > 0 \quad (6.5)$$

ce qui implique que l'élément de référence et l'élément réel soient numérotés dans le même sens (en général positif).

### 6.1.2 Maillage conforme

La transformation géométrique doit assurer la continuité de la géométrie entre les éléments (figure 8).

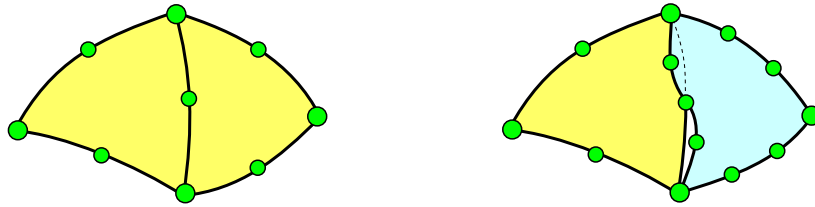


Figure 8 – *Maillage conforme (à gauche) et non conforme (à droite)*

Si deux éléments ont une arête commune :

- les deux éléments doivent avoir le même nombre de nœuds sur l'arête.
- les coordonnées d'un point de l'arête ne doivent dépendre que des coordonnées des nœuds de l'arête ; elles se réduisent à :

$$x(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_a} N_i^a(\alpha) x_i \quad , \quad y(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_a} N_i^a(\alpha) y_i \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.6)$$

où  $n_a$  est le nombre de nœuds situés sur l'arête et les  $N_i^a(\alpha)$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément à une dimension et  $n_a$  nœuds (figure 15) et (§ 6.2.2 : transformation d'une arête).

### 6.1.3 Représentation du champ de déplacements

Les fonctions  $N_i(\xi, \eta)$  qui définissent la transformation géométrique sont les **fonctions d'interpolation** pour le champ de déplacements (élément isoparamétrique) :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad , \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (6.7)$$

où  $u_i$  et  $v_i$  sont les déplacements du nœud  $i$ .

*Critère de complétude* : pour que la solution « éléments finis » converge vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro, l'élément doit pouvoir représenter un champ de déplacements qui

correspond à des déformations nulles (mouvement de corps rigide) ou constantes. Considérons donc le champ de déplacements :

$$u(x, y) = a_x + b_x x + c_x y \quad , \quad v(x, y) = a_y + b_y x + c_y y \quad (6.8)$$

d'où les valeurs nodales :

$$u_i = a_x + b_x x_i + c_x y_i \quad , \quad v_i = a_y + b_y x_i + c_y y_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (6.9)$$

Le champ de déplacements sur  $x$  s'écrit sous forme paramétrique (équation 6.7) :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) (a_x + b_x x_i + c_x y_i) \\ &= a_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) + b_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i + c_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (6.10)$$

En utilisant les relations (6.1), il vient :

$$u(x, y) = a_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) + b_x x + c_x y \quad (6.11)$$

On retrouve le champ de déplacements (6.8) si :

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (6.12)$$

Cette condition est vérifiée par les éléments décrits ci-dessous.

*Remarque* : si le maillage est conforme, le champ de déplacement est continu entre les éléments.

## 6.2 Bibliothèque d'éléments

### 6.2.1 Triangle à 3 nœuds

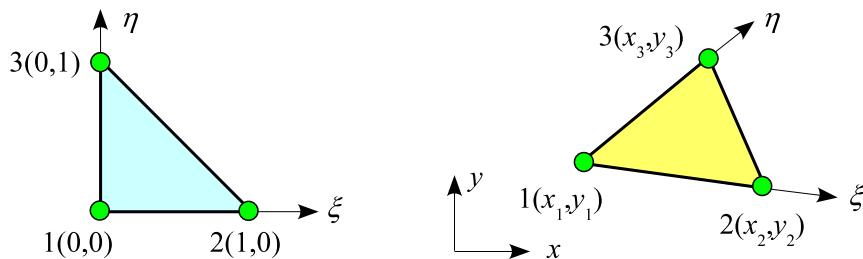


Figure 9 – Triangle à 3 nœuds

La transformation géométrique est de la forme :

$$x(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = [P(\xi, \eta)] \{A\} \quad (6.13)$$

$[P(\xi, \eta)]$  est la base polynomiale de la transformation.

La transformation est nodale d'où :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(0,0) \\ x(1,0) \\ x(0,1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = [C] \{A\} \quad (6.14)$$

On en déduit :

$$x(\xi, \eta) = [P] [C]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Il vient pour les fonctions d'interpolation et leurs dérivées (programme **tri3\_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

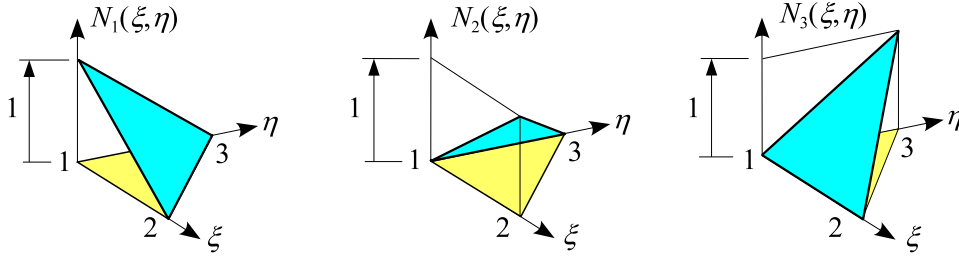


Figure 10 – Triangle à 3 nœuds : fonctions d'interpolation

**Matrice jacobienne de la transformation** : elle est égale à (équation (6.2)) :

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

d'où son déterminant :

$$\det[J(\xi, \eta)] = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 2A \quad (6.18)$$

où  $A$  est l'aire de l'élément réel.

### 6.2.2 Triangle à 6 nœuds

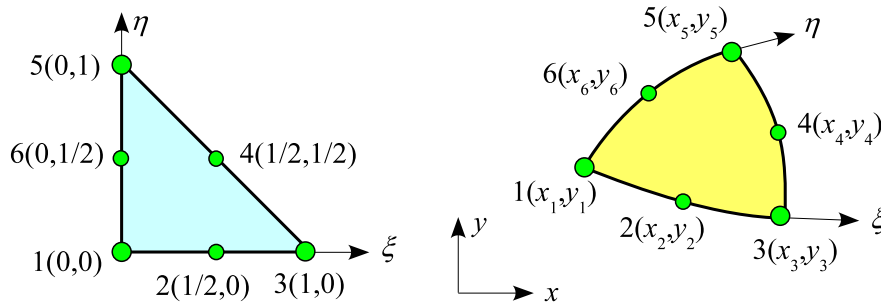


Figure 11 – Triangle à 6 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \xi\eta] \quad (6.19)$$

Fonctions d'interpolation ( $\lambda = 1 - \xi - \eta$ ) (programme **tri6\_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \lambda(2\lambda - 1) \\ 4\xi\lambda \\ \xi(2\xi - 1) \\ 4\xi\eta \\ \eta(2\eta - 1) \\ 4\eta\lambda \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 - 4\lambda \\ 4(\lambda - \xi) \\ -1 + 4\xi \\ 4\eta \\ 0 \\ -4\eta \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 - 4\lambda \\ -4\xi \\ 0 \\ 4\xi \\ -1 + 4\eta \\ 4(\lambda - \eta) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

**Transformation d'une arête** : considérons l'arête de l'élément de référence passant par les nœuds 3, 4 et 5 ; elle est définie par  $\lambda = 1 - \xi - \eta = 0$  d'où  $\eta = 1 - \xi$  avec  $0 \leq \xi \leq 1$  ; elle devient dans l'élément réel la courbe d'équation paramétrique :

$$x(\xi) = [0 \quad 0 \quad \xi(2\xi - 1) \quad 4\xi(1 - \xi) \quad (1 - \xi)(1 - 2\xi) \quad 0] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \xi(2\xi - 1)x_3 + 4\xi(1 - \xi)x_4 + (1 - \xi)(1 - 2\xi)x_5$$

$$y(\xi) = \xi(2\xi - 1)y_3 + 4\xi(1 - \xi)y_4 + (1 - \xi)(1 - 2\xi)y_5 \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

d'où en posant  $\xi = (1 - \alpha)/2$  :

$$x(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x_3 + (1 - \alpha^2) x_4 + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} x_5 = \bar{N}_1(\alpha) x_3 + \bar{N}_2(\alpha) x_4 + \bar{N}_3(\alpha) x_5$$

$$y(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) y_3 + \bar{N}_2(\alpha) y_4 + \bar{N}_3(\alpha) y_5 \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

Les  $\bar{N}_i(\alpha)$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément isoparamétrique à une dimension et trois nœuds. Si le nœud 4 est au milieu des nœuds 3 et 5, la transformation se réduit à :

$$x(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{2} x_3 + \frac{1 + \alpha}{2} x_5 \quad , \quad y(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{2} y_3 + \frac{1 + \alpha}{2} y_5$$

*Remarque* : le champ de déplacements des points de l'arête est :

$$u(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) u_3 + \bar{N}_2(\alpha) u_4 + \bar{N}_3(\alpha) u_5 \quad , \quad v(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) v_3 + \bar{N}_2(\alpha) v_4 + \bar{N}_3(\alpha) v_5$$

Il ne dépend que des déplacements des nœuds de l'arête (élément conforme).

### 6.2.3 Quadrangle à 4 nœuds

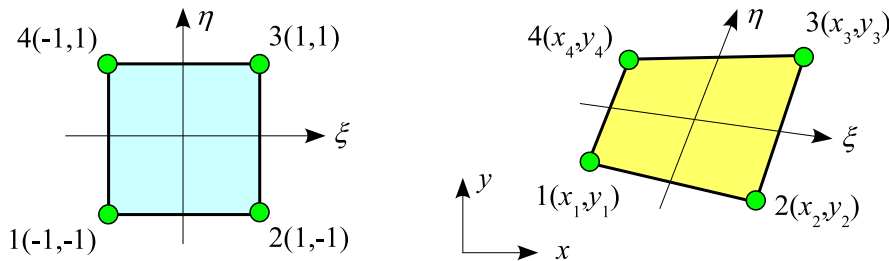


Figure 12 – Quadrangle à 4 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \quad (6.21)$$

Fonctions d'interpolation (programme **quad4\_int**) :

$$[N]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) \\ (1-\eta) \\ (1+\eta) \\ -(1+\eta) \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi) \\ -(1+\xi) \\ (1+\xi) \\ (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

#### 6.2.4 Quadrangle à 8 ou 9 nœuds

Quadrangle à 8 nœuds :

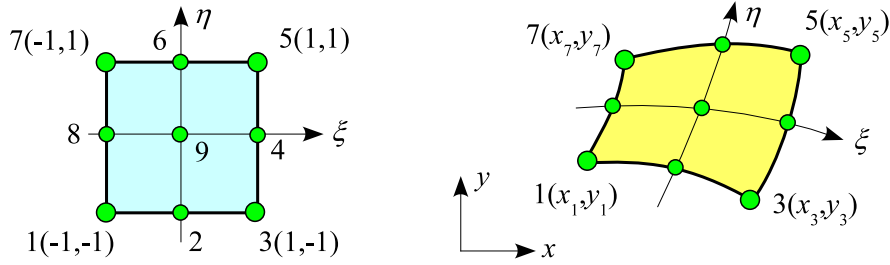


Figure 13 – Quadrangle à 8 ou 9 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2] \quad (6.23)$$

Fonctions d'interpolation (programme **quad8\_int**) :

$$[N]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ 2(1-\xi^2)(1-\eta) \\ -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\ 2(1-\xi^2)(1+\eta) \\ -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ 2(1-\xi)(1-\eta^2) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta)(2\xi+\eta) \\ -4(1-\eta)\xi \\ (1-\eta)(2\xi-\eta) \\ 2(1-\eta^2) \\ (1+\xi)(2\xi+\eta) \\ -4(1+\eta)\xi \\ (1+\eta)(2\xi-\eta) \\ 2(1-\eta^2) \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(\xi+2\eta) \\ -2(1-\xi^2) \\ -(1+\xi)(\xi-2\eta) \\ -4(1+\xi)\eta \\ (1+\xi)(\xi+2\eta) \\ 2(1-\xi^2) \\ -(1-\xi)(\xi-2\eta) \\ -4(1-\xi)\eta \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Quadrangle à 9 nœuds :

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [\dots \quad \xi^i \eta^j \quad \dots] \quad i, j = 0, \dots, 2 \quad (6.26)$$



Fonctions d'interpolation (programme **quad9\_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & L_1(\eta) \\ L_2(\xi) & L_1(\eta) \\ L_3(\xi) & L_1(\eta) \\ L_3(\xi) & L_2(\eta) \\ L_3(\xi) & L_3(\eta) \\ L_2(\xi) & L_3(\eta) \\ L_1(\xi) & L_3(\eta) \\ L_1(\xi) & L_2(\eta) \\ L_2(\xi) & L_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} DL_1(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_2(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_1(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_1(\xi) & L_2(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_2(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_1(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_1(\xi) & DL_2(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_2(\eta) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

où :

$$[L(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} & 1-\xi^2 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{bmatrix}, \quad [DL(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{2\xi-1}{2} & -2\xi & \frac{2\xi+1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

### 6.3 Calcul des matrices et des vecteurs élémentaires

#### 6.3.1 Transformation des dérivées

Les dérivées d'une fonction  $f(x, y)$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  sont :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

On en déduit l'expression des dérivées de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

avec

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}, \quad \det[J] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (6.31)$$

#### 6.3.2 Transformation des intégrales

La surface infinitésimale  $d\xi d\eta$  au point  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence se transforme en la surface  $dA$  au point  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  de l'élément réel.

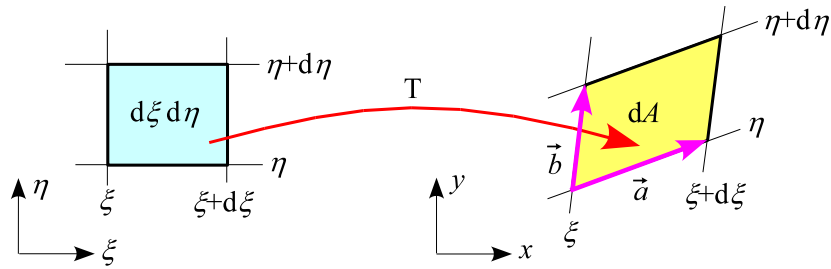


Figure 14 – Transformation des surfaces

On a la relation :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{k} dA \quad (6.32)$$

soit

$$\{a\} \wedge \{b\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = \{k\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \{k\} dA \quad (6.33)$$

d'où :

$$dA = \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (6.34)$$

L'intégrale sur l'élément réel

$$\int_V f(x, y) dV \quad (6.35)$$

devient donc sur l'élément de référence

$$\int_A t f(x, y) dA = \int_{A_{ref}} t f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (6.36)$$

où  $t$  est l'épaisseur supposée constante de l'élément.

*Remarques :*

- on a la relation

$$\int_{A_{ref}} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = A \quad (6.37)$$

où  $A$  est l'aire de l'élément réel.

- si l'épaisseur de l'élément est variable et donnée par ses valeurs nodales  $t_i$ , on a :

$$t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) t_i \quad (6.38)$$

### 6.3.3 Évaluation numérique des intégrales

Les intégrales sont évaluées par intégration numérique ([2, 3, 9, 15]) :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{npi} w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{quadrangle}) \quad (6.39)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{npi} w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{triangle}) \quad (6.40)$$

où :

- $npi$  est le nombre de points d'intégration.
- $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont les coordonnées du  $i^e$  point d'intégration.
- $w_i$  est le poids du  $i^e$  point d'intégration.

### 6.3.4 Calcul des matrices

La matrice de rigidité est égale à :

$$\begin{aligned}
 [k] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{A_{ref}} t [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [B(\xi_i, \eta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i)] \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

où :

$$[B] = [ B_1 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_n ] \quad \text{avec} \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{6.42}$$

De même, la matrice de masse s'écrit :

$$\begin{aligned}
 [m] &= \int_V \rho [N]^T [N] dV = \int_{A_{ref}} t \rho [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t \rho [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

où :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_i & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_i & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

### 6.3.5 Calcul des vecteurs

#### Force volumique

Le vecteur force dû à une force volumique est égal à :

$$\begin{aligned}
 \{f\} &= \int_V [N]^T \{f_V\} dV = \int_{A_{ref}} t [N(\xi, \eta)]^T \{f_V\} \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [N(\xi_i, \eta_i)]^T \begin{Bmatrix} f_{Vx} \\ f_{Vy} \end{Bmatrix} \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

#### Gradient thermique

Le vecteur force dû à gradient thermique est égal à :

$$\begin{aligned}
 \{f_{th}\} &= \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV = \int_{A_{ref}} t [B(\xi, \eta)]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [B(\xi_i, \eta_i)]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

#### Force surfacique

Le champ de déplacements des points situés sur la frontière d'un élément est égal à (élément conforme (§ 6.1.2)) :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) x_i \quad , \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) y_i \quad (6.47a)$$

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) u_i \quad , \quad v(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) v_i \quad (6.47b)$$

où  $n$  est le nombre de nœuds situés sur la frontière et les  $\bar{N}_i(\xi)$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément de référence à une dimension et  $n$  nœuds (figure 15).

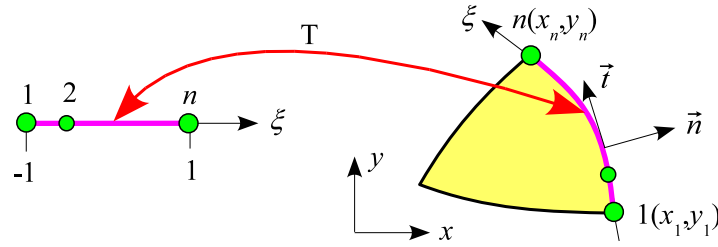


Figure 15 - Transformation des frontières

On en déduit :

$$dx = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} x_i \right) d\xi = J_x d\xi \quad , \quad dy = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} y_i \right) d\xi = J_y d\xi \quad (6.48)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} d\xi = J_s d\xi \quad (6.49)$$

d'où l'expression des composantes des vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  ( $\vec{n}$  est la normale unitaire à  $S_\sigma$  dirigée vers l'extérieur de l'élément ;  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire tangent à  $S_\sigma$ ) :

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_s} \begin{Bmatrix} J_x \\ J_y \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_s} \begin{Bmatrix} J_y \\ -J_x \end{Bmatrix} \quad (6.50)$$

Le vecteur force dû à une force surfacique d'intensité  $\vec{f}_\sigma$  appliquée sur l'une des frontières d'un élément est égal à :

$$\begin{aligned} \{f\} &= \int_{S_\sigma} [N] \{f_\sigma\} dS = \int_{S_\sigma} [\bar{N}]^T \{f_\sigma\} dS = \int_{-1}^1 t [\bar{N}(\xi)]^T \{f_\sigma(\xi)\} J_s(\xi) d\xi \\ &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [\bar{N}(\xi_i)]^T \{f_\sigma(\xi_i)\} J_s(\xi_i) w_i \end{aligned} \quad (6.51)$$

où :

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \dots & \bar{N}_i & 0 & \dots & \bar{N}_n & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & \dots & 0 & \bar{N}_i & \dots & 0 & \bar{N}_n \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Pour une force perpendiculaire à la surface d'intensité  $p$  :  $\vec{f}_\sigma = p \vec{n}$ , l'expression ci-dessus se réduit à :

$$\{f\} \approx \sum_{i=1}^{npi} t [\bar{N}(\xi_i)]^T p(\xi_i) \begin{Bmatrix} J_y(\xi_i) \\ -J_x(\xi_i) \end{Bmatrix} w_i \quad (6.53)$$

## 6.4 Qualité du jacobien.

La condition  $\det [J] > 0$  impose certaines conditions à la géométrie d'un élément.

**Exemple 1** : considérons le quadrangle à 4 nœuds représenté sur la figure (16).

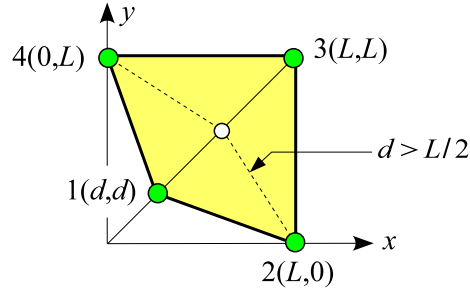


Figure 16 – Quadrangle à 4 nœuds

La matrice jacobienne est égale à (équations (6.2) et (6.22)) (programme § A.6) :

$$\begin{aligned}
 [J] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & d \\ L & 0 \\ L & L \\ 0 & L \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2L - d(1-\eta) & -d(1-\eta) \\ -d(1-\xi) & 2L - d(1-\xi) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d'où

$$8 \det [J] = 2L^2 - dL(2 - \xi - \eta)$$

$\det [J]$  est minimal pour  $\xi = \eta = -1$  :

$$\min(\det [J]) = L(L - 2d)/4$$

La condition  $\det [J] > 0$  dans tout l'élément impose donc :  $d < L/2$ .

*Remarque* : si  $d = L/2$ , les nœuds 1, 2 et 4 sont alignés. Si  $d > L/2$ , la transformation qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel génère des points en dehors du quadrangle réel (figure 17).

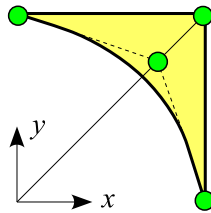


Figure 17 – Quadrangle à 4 nœuds :  $d > L/2$

**Exemple 2** : considérons le triangle à 6 nœuds représenté sur la figure (18).

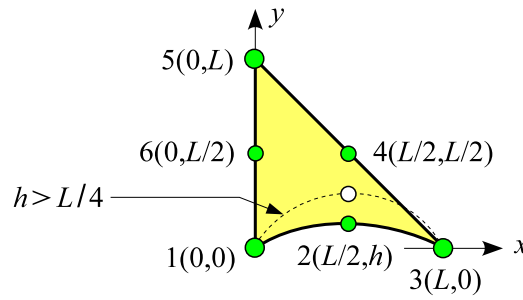


Figure 18 – Triangle à 6 nœuds à bords curvilignes

La matrice jacobienne est égale à (équations (6.2) et (6.20)) (programme § A.7) :

$$[J] = \begin{bmatrix} L & 4h(1 - 2\xi - \eta) \\ 0 & L - 4h\xi \end{bmatrix}$$

d'où

$$\det [J] = L(L - 4h\xi)$$

La condition  $\det [J] > 0$  dans tout l'élément impose :  $h < L/4$ .

*Remarque* : si  $h = L/4$ , la parabole qui passe par les nœuds 1, 2 et 3 est tangente à la droite qui passe par les nœuds 3, 4 et 5.

On appelle qualité du jacobien la quantité :

$$q_J = \frac{\text{Aire de l'élément de référence}}{\text{Aire de l'élément réel}} \min(\det [J(\xi, \eta)]) \quad (6.54)$$

*Remarques* :

- La qualité du jacobien est comprise entre 0 et 1. La qualité maximale est 1 : dans ce cas, le déterminant du jacobien est constant dans l'élément.
- Dans la pratique, on se contente d'évaluer le déterminant du jacobien aux nœuds de l'élément.
- D'autres définitions sont possibles. On rencontre souvent celle-ci :

$$q_J = \frac{\min(\det [J(\xi, \eta)])}{\max(\det [J(\xi, \eta)])} \quad (6.55)$$

## A Programmes Maple

Les programmes suivants sont dans le fichier `map_elas_2d.txt`.

### A.1 tri3\_int : triangle à 3 nœuds

```
restart:with(linalg):

n:=3;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta];
# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1,0]:
eta_nod:=[0,0,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
```

### A.2 tri6\_int : triangle à 6 nœuds

```
restart:with(linalg):

n:=6;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*xi,eta*eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1/2,1,1/2,0,0]:
eta_nod:=[0,0,0,1/2,1,1/2]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
```

### A.3 quad4\_int : quadrangle à 4 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=4;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,1,1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,1,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```

### A.4 quad8\_int : quadrangle à 8 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=8;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta,xi^2,eta^2,xi^2*eta,xi*eta^2];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,0,1,1,1,0,-1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,-1,0,1,1,1,0]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```



### A.5 quad9\_int : quadrangle à 9 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=9;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta,xi^2,eta^2,xi^2*eta,xi*eta^2,xi^2*eta^2];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,0,1,1,1,0,-1,-1,0]:
eta_nod:=[-1,-1,-1,0,1,1,1,0,0]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```

### A.6 Qualité du jacobien : quadrangle à 4 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=4;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,1,1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,1,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
dN:=matrix([dNxi,dNeta]);

coord:=matrix([[d,d],[L,0],[L,L],[0,L]]);

J:=multiply(dN,coord):J:=simplify(%);
detJ:=det(J);

```

### A.7 Qualité du jacobien : triangle à 6 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=6;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*xi,eta*eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1/2,1,1/2,0,0]:
eta_nod:=[0,0,0,1/2,1,1/2]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
dN:=matrix([dNxi,dNeta]);

coord:=matrix([[0,0],[L/2,h],[L,0],[L/2,L/2],[0,L],[0,L/2]]);

J:=multiply(dN,coord):J:=simplify(%);
detJ:=det(J);

```

## Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] K.-J. BATHE – *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, 1996.
- [3] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [4] M. BONNET et A. FRANGI – *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Éditions de l'École polytechnique, 2007.
- [5] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [6] R. D. COOK, D. S. MALKUS et M. E. PLESHA – *Concepts and applications of finite element analysis*, 3 éd., Wiley, 1989.
- [7] M. A. CRISFIELD – *Finite elements and solution procedures for structural analysis*, Pineridge Press, 1986.
- [8] G. DHATT et G. TOUZOT – *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [9] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [10] D. EUVRARD – *Résolution des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Différences finies, éléments finis, problèmes en domaines non bornés*, 3 éd., Masson, 1994.
- [11] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [12] R. H. GALLAGHER – *Introduction aux éléments finis*, Pluralis, 1976.
- [13] L. GALLIMARD et J.-P. PELLE (éds.) – *Estimateurs d'erreur pour les analyses éléments finis (revue européenne des éléments finis vol.12 n° 6/2003)*, Hermès, 2003.
- [14] T. J. HUGHES – *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover, 2000.
- [15] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [16] P. LADEVÈZE et J.-P. PELLE – *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermès, 2001.
- [17] A. LE POURHIET – *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Une première approche*, Cépaduès, 1988.
- [18] R. H. MACNEAL – *Finite elements. Their design and performance*, Dekker, 1994.
- [19] N. OTTOSEN et H. PETERSSON – *Introduction to the finite element method*, Prentice Hall, 1992.
- [20] J.-P. PELLE, P. BECKERS et L. GALLIMARD – *Estimations des erreurs de discrétisation et analyses adaptatives. Application à l'automatisation des calculs éléments finis*, Cours IPSI, 1996.
- [21] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [22] B. SZABÓ et I. BABUŠKA – *Finite element analysis*, Wiley, 1991.
- [23] P. THOMAS – *Éléments finis pour l'ingénieur. Grands principes et petites recettes*, Tec & Doc (Collection EDF R&D), 2006.
- [24] P. TROMPETTE – *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis*, Masson, 1992.
- [25] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.

- [26] O. C. ZIENKIEWICZ – *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur*, Ediscience, 1973.
- [27] — , *The finite element method*, McGraw-Hill, 1977.
- [28] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR – *La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires*, AFNOR, 1989.
- [29] — , *The finite element method, Volume 1. The basis*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [30] — , *The finite element method, Volume 2. Solid mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2000.