

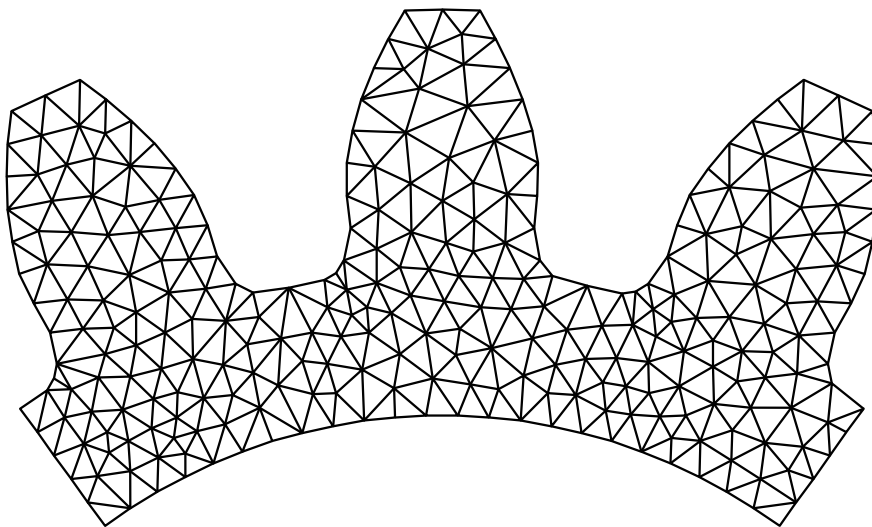
# Méthode des éléments finis : élasticité plane

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*24 mars 2006 – 29 mars 2011*



## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels : état de contraintes planes</b>	<b>3</b>
<b>2 Maillage de la structure</b>	<b>5</b>
<b>3 Étude élémentaire</b>	<b>5</b>
3.1 Vecteur déplacement . . . . .	6
3.2 Approximation du champ de déplacements . . . . .	6
3.3 Expression des déformations en fonction des variables nodales . . . . .	7
3.4 Énergie de déformation et matrice de rigidité . . . . .	8
3.5 Travail des forces extérieures et vecteur force . . . . .	8
<b>4 Analyse globale : assemblage</b>	<b>9</b>
<b>5 Résolution</b>	<b>10</b>
5.1 Partition des degrés de liberté . . . . .	10
5.2 Calcul des déplacements inconnus . . . . .	10
5.3 Calcul des réactions d'appui . . . . .	10
5.4 Calcul des déformations et des contraintes dans les éléments . . . . .	11
<b>Références</b>	<b>11</b>

## Introduction

Ce texte est consacré à la résolution d'un problème d'élasticité plane par la méthode des éléments finis. Nous supposons connus les principes et les principaux résultats de la théorie de l'élasticité. De plus, nous supposerons le solide en état de contraintes planes.

Un problème d'élasticité est résolu si l'on connaît le vecteur déplacement en tout point du solide. Notre problème est donc défini par un nombre infini de paramètres. Un tel système est dit continu. La méthode des éléments finis remplace le système continu par un modèle discret caractérisé par un nombre fini de paramètres.

Les principales étapes de la méthode des éléments finis sont :

1. La géométrie est décomposée en domaines de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds. L'élément utilisé sera le « triangle à trois nœuds ».
2. Le champ de déplacements dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément. On en déduit l'état de déformation et l'état de contrainte en tout point de l'élément ainsi que l'énergie de déformation de l'élément et sa matrice de rigidité.
3. La matrice de rigidité globale est construite à partir des matrices de rigidité élémentaires.
4. Après mise en place des conditions aux limites et des charges, on calcule les déplacements inconnus puis, dans chaque élément, les déformations et les contraintes.

Les déplacements nodaux sont les inconnues du problème. Cette méthode qui consiste à prendre les déplacements nodaux comme inconnues du problème s'appelle la méthode des déplacements.

## 1 Rappels : état de contraintes planes

Un solide (figure 1) est en état de contraintes planes par rapport au plan  $\{O; x, y\}$ , s'il existe un repère orthonormé  $\{O; x, y, z\}$ , tel qu'en tout point  $M$  du solide, le tenseur des contraintes  $[\sigma(M)]$  soit de la forme :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{matrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1.1)$$

où :

- $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont indépendants de  $z$ .
- $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes.

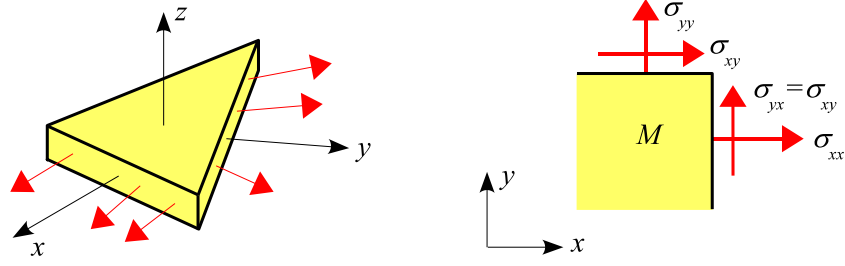


Figure 1 – Plaque chargée dans son plan

L'axe  $\vec{k} = \vec{n}_3$  est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée  $\sigma_3$  est nulle.

Les deux autres contraintes principales sont les solutions du polynôme caractéristique :

$$\sigma_n^2 - \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{\text{tr}[\sigma]=\sigma_1+\sigma_2} \sigma_n + \underbrace{\sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2}_{\text{det}[\sigma]=\sigma_1 \sigma_2} = 0 \quad (1.2)$$

d'où les contraintes principales :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \sigma_{xy}^2} \quad (1.3)$$

et les directions principales associées :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad (1.4)$$

Le tenseur des déformations est de la forme :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

avec :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.6)$$

La figure (2) montre la signification des composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$  du tenseur des déformations.

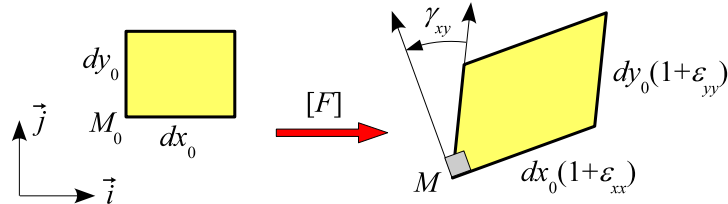


Figure 2 – Transformation d'un rectangle infiniment petit

La loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

soit

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (1.8)$$

De plus :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.9)$$

L'état de déformation est donc entièrement défini par les trois quantités :

$$\varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon_{yy} \quad , \quad \gamma_{xy} \quad (1.10)$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

## 2 Maillage de la structure

Le solide à étudier est décomposé en triangles à trois nœuds (figure 3). Cette opération s'appelle maillage. Il en résulte deux tables :

- la table des nœuds : elle contient les coordonnées des nœuds.
- la table des éléments : pour chaque élément, elle contient les numéros des trois nœuds (dans le sens trigonométrique), les caractéristiques du matériau, l'épaisseur...

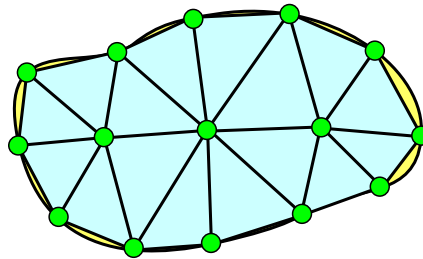


Figure 3 – Maillage du domaine en triangles à trois nœuds

## 3 Étude élémentaire

Considérons l'élément dont les nœuds sont (1, 2, 3) (figure 4).

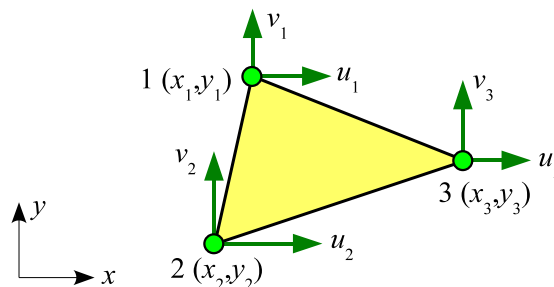


Figure 4 – Élément triangle à trois nœuds

### 3.1 Vecteur déplacement

C'est le vecteur qui regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'élément :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

### 3.2 Approximation du champ de déplacements

À l'intérieur de l'élément, le champ de déplacements

$$\{u(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

est défini comme étant une interpolation linéaire des déplacements nodaux (figure 5) :

$$\begin{cases} u(x, y) = N_1(x, y) u_1 + N_2(x, y) u_2 + N_3(x, y) u_3 \\ v(x, y) = N_1(x, y) v_1 + N_2(x, y) v_2 + N_3(x, y) v_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

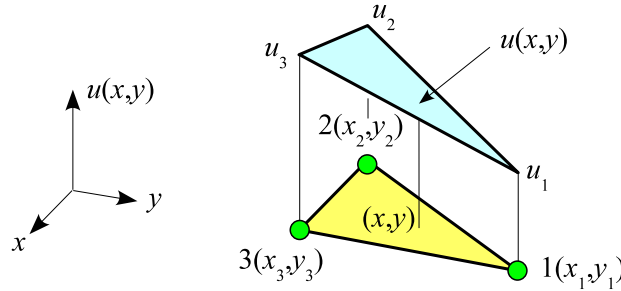


Figure 5 – Composante  $u(x, y)$  du champ de déplacements dans l'élément

Les fonctions  $N_i(x, y)$  sont les fonctions d'interpolation. On appelle matrice d'interpolation la matrice :

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec cette notation, le champ de déplacements s'écrit :

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)] \{u\} \quad (3.5)$$

Les fonctions d'interpolation sont telles que l'on retrouve les déplacements nodaux quand on remplace  $x$  et  $y$  par les coordonnées nodales. En particulier :

$$u(x_1, y_1) = u_1 \quad , \quad u(x_2, y_2) = u_2 \quad , \quad u(x_3, y_3) = u_3 \quad \forall u_1, u_2, u_3 \quad (3.6)$$

d'où :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

La fonction d'interpolation  $N_1(x, y)$  doit donc vérifier les conditions :

$$N_1(x_1, y_1) = 1 \quad , \quad N_1(x_2, y_2) = 0 \quad , \quad N_1(x_3, y_3) = 0 \quad (3.8)$$

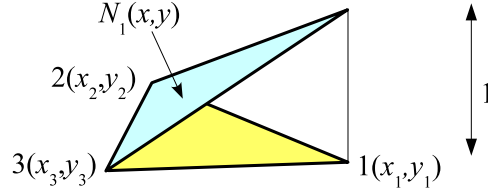


Figure 6 – Fonction d'interpolation associée au nœud 1 dans l'élément

Posons (figure 6) :

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y \quad (3.9)$$

où  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  sont des constantes.

Les trois conditions ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

On obtient :

$$a_1 = \frac{1}{2A} (x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad , \quad b_1 = \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \quad , \quad c_1 = \frac{1}{2A} (x_3 - x_2) \quad (3.12)$$

où l'aire  $A$  de l'élément est définie par la relation :

$$\begin{aligned} 2A &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les deux autres fonctions d'interpolation s'obtiennent par permutation circulaire sur 1, 2 et 3.

*Remarque* : la somme des trois fonctions d'interpolation est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1 \quad (3.14)$$

### 3.3 Expression des déformations en fonction des variables nodales

Les déformations sont égales à :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.15)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} \quad (3.17)$$

*Remarque* : avec l'approximation choisie, les déformations sont constantes dans l'élément.

### 3.4 Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation de l'élément est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $V$  est le volume de l'élément. En utilisant les relations précédentes, on obtient :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (3.19)$$

où

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.20)$$

est la matrice de rigidité. Par construction, cette matrice est symétrique.

Les matrices  $[B]$  et  $[D]$  sont constantes. Si de plus l'épaisseur  $t$  de l'élément est constante, la matrice de rigidité se réduit à :

$$[k] = [B]^T [D] [B] t A \quad (3.21)$$

### 3.5 Travail des forces extérieures et vecteur force

Le travail des forces extérieures pour le déplacement  $\{u(x, y)\}$  est :

$$W_{\text{ext}} = \int_V \{u(x, y)\}^T \{f_V\} dV + \int_S \{u(x, y)\}^T \{f_S\} dS$$

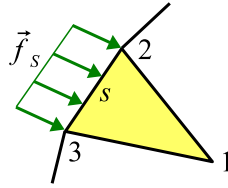
où  $\{f_V\}$  et  $\{f_S\}$  sont respectivement les forces volumiques et surfaciques et  $S$  est la surface de l'élément.

$W_{\text{ext}}$  s'écrit en fonction des déplacements nodaux :

$$W_{\text{ext}} = \{u\}^T \int_V [N]^T \{f_V\} dV + \{u\}^T \int_S [N]^T \{f_S\} dS = \{u\}^T \{f\}$$

Si  $\{f_V\}$  et l'épaisseur  $t$  de l'élément sont constants, on a :

$$\int_V [N]^T \{f_V\} dV = \frac{At}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{Vx} \\ f_{Vy} \end{Bmatrix}$$



Si  $\{f_S\}$  et l'épaisseur  $t$  de l'élément sont constants, la contribution de  $\{f_S\}$  au vecteur  $\{f\}$  de l'élément représenté sur la figure ci-dessus est :

$$\int_S [N]^T \{f_S\} dS = \frac{Lt}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \end{Bmatrix}, \quad L^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$$

#### 4 Analyse globale : assemblage

L'énergie de déformation de la structure est la somme des énergies de déformation élémentaires :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} = \sum_{\text{éléments}} E_{\text{def}}^{(e)} \quad (4.1)$$

$\{U\}$  est le vecteur déplacement global (ensemble des déplacements nodaux) et  $[K]$  est la matrice de rigidité globale. La construction de  $[K]$  à partir des matrices de rigidité élémentaires s'appelle assemblage. Pour réaliser cette opération, on exprime les énergies élémentaires en fonction des variables globales :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \\ &= \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{U\}^T [K^{(e)}] \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T \left( \underbrace{\sum_{\text{éléments}} [K^{(e)}]}_{[K]} \right) \{U\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans la matrice  $[K^e]$  obtenue par expansion de  $[k^{(e)}]$ , les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément  $(e)$ .

De même, le travail des forces extérieures pour le déplacement  $\{u(x, y)\}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \{U\}^T \{F\} = \sum_{\text{éléments}} W_{\text{ext}}^{(e)} \\ &= \sum_{\text{éléments}} \{u^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} = \sum_{\text{éléments}} \{U\}^T \{F^{(e)}\} = \{U\}^T \underbrace{\left( \sum_{\text{éléments}} \{F^{(e)}\} \right)}_{\{F\}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les équations d'équilibre de la structure s'écrivent :

$$[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\} \quad (4.4)$$

où  $\{F_{\text{nod}}\}$  est le vecteur des réactions d'appui.

## 5 Résolution

### 5.1 Partition des degrés de liberté

Le système d'équations linéaires (4.4) n'a pas de solution : la matrice de rigidité est une matrice singulière ( $\det[K] = 0$ ). Imposons un certain nombre de déplacements et numérotions les degrés de liberté de façon à obtenir la partition suivante [4] :

$$\{U\} = \begin{cases} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\{U_L\}$  représente les déplacements inconnus et  $\{U_P\}$  les déplacements connus. Cette partition du vecteur déplacement induit une partition du vecteur force et de la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{cases} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \{F_{\text{nod},P}\} = ? \end{cases} + \begin{cases} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{cases} \quad (5.2)$$

*Remarque* : dans la pratique, la partition des degrés de liberté est effectuée avant l'assemblage.

### 5.2 Calcul des déplacements inconnus

Du système d'équations précédent, on déduit :

$$\{F_L\} = [K_{LL}]\{U_L\} + [K_{LP}]\{U_P\} \quad (5.3)$$

d'où :

$$[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}]\{U_P\} \quad (5.4)$$

Le deuxième membre de l'équation ci-dessus est connu. Si le nombre de liaisons est suffisant, la matrice  $[K_{LL}]$  n'est pas singulière ( $\det[K_{LL}] \neq 0$ ) et ce système d'équations linéaires permet donc le calcul des déplacements inconnus :

$$\{U_L\} = [K_{LL}]^{-1} (\{F_L\} - [K_{LP}]\{U_P\}) \quad (5.5)$$

### 5.3 Calcul des réactions d'appui

Tous les déplacements étant connus, les réactions d'appui sont égales à :

$$\{F_{\text{nod},P}\} = [K_{PL}]\{U_L\} + [K_{PP}]\{U_P\} - \{F_P\} \quad (5.6)$$

## 5.4 Calcul des déformations et des contraintes dans les éléments

Les déformations et les contraintes sont calculées dans chaque élément à l'aide des relations :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (5.7)$$

et

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.8)$$

*Remarque* : avec l'approximation choisie (triangle à trois nœuds), ces quantités sont constantes dans un élément.

## Références

- [1] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [2] D. GAY et J. GAMBELIN – *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*, Hermès, 1989.
- [3] — , *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [4] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [5] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.