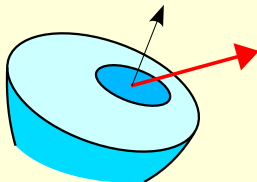


# Élasticité

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique  
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*12 juin 2007 – 31 mai 2011*



# Plan de la présentation

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique
- 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie
- 7 Références

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique
- 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie
- 7 Références

# Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

# Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).

# Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

# Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

Le repère  $\{O; x, y, z\}$  est un repère orthonormé.  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes.

## 1 Présentation et hypothèses

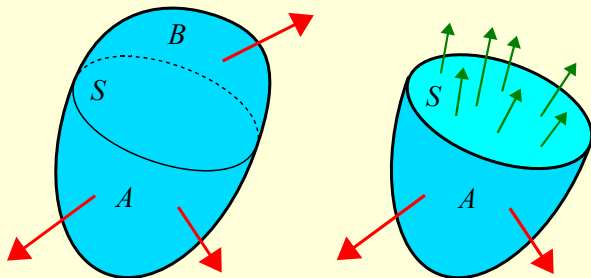
## 2 Contraintes

- Coupure et forces intérieures
- Facette et vecteur contrainte
- Contrainte normale et contrainte tangentielle
- Formule de Cauchy : tenseur des contraintes
- Équations d'équilibre
- Contraintes et directions principales
- Cercle de Mohr des contraintes
- Cercles de Mohr des contraintes
- États de contrainte particuliers
  - État de contrainte uniaxial
  - État de contrainte plan
  - Cisaillement simple
  - État de contrainte isotrope

## 3 Déformations

## Coupure et forces intérieures

En chaque point  $M$  d'un solide, il existe des **forces intérieures** que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface  $S$ , en deux parties  $A$  et  $B$ .



La partie  $A$ , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

## Facette et vecteur contrainte

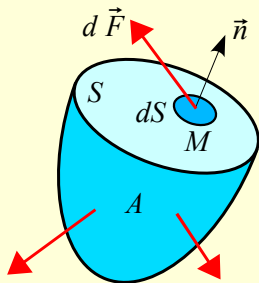
Soient  $M$  un point de  $S$ ,  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $S$  entourant  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire en  $M$  à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de la partie  $A$ .

Cet ensemble est appelé **facette**  $\vec{n}$  en  $M$ .

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur cette facette.

On appelle **vecteur contrainte sur la facette**  $\vec{n}$  en  $M$ , la quantité :

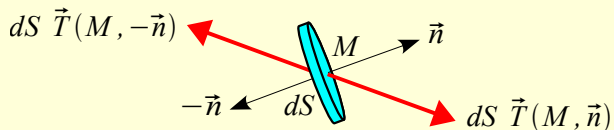
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$



Une contrainte s'exprime en **pascal** ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ); dans la pratique, on utilise souvent le **mégapascal** ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$ ).

## Facette et vecteur contrainte

Considérons, en un point  $M$ , le cylindre infiniment petit d'axe  $\vec{n}$ , de hauteur  $h$  et de section  $dS$ .

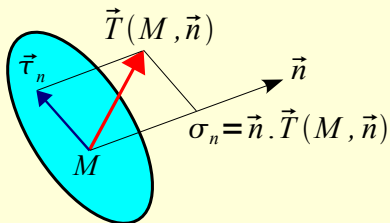


Quand  $h$  tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces  $dS \vec{T}(M, \vec{n})$  et  $dS \vec{T}(M, -\vec{n})$  d'où :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

# Contrainte normale et contrainte tangentielle

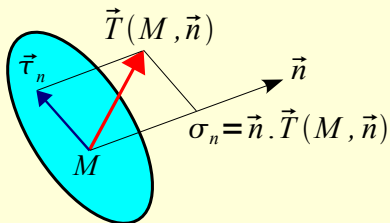
Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette :



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

# Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette :



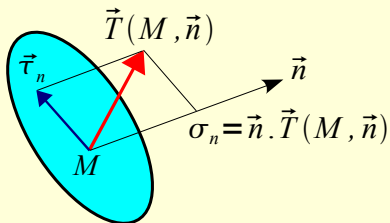
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$\sigma_n$  est la **contrainte normale** :

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 & : \text{traction} \\ \sigma_n < 0 & : \text{compression} \end{cases}$$

# Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette :



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

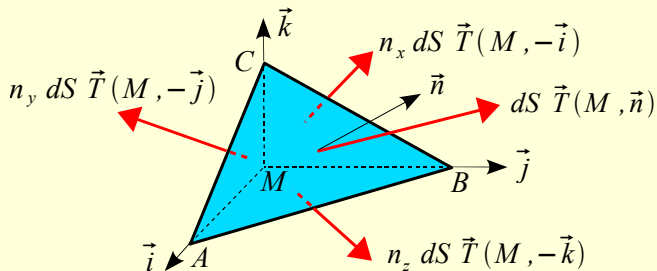
$\sigma_n$  est la **contrainte normale** :

$$\begin{cases} \sigma_n > 0 & : \text{traction} \\ \sigma_n < 0 & : \text{compression} \end{cases}$$

$\vec{\tau}_n$  est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**.

# Équilibre du tétraèdre : formule de Cauchy

Considérons le tétraèdre infiniment petit  $MABC$  construit sur les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Soient  $\vec{n}$  la normale au plan  $ABC$  dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et  $dS$  l'aire du triangle  $ABC$ .



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x \vec{T}(M, \vec{i}) + n_y \vec{T}(M, \vec{j}) + n_z \vec{T}(M, \vec{k})$$

# Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

La **formule de Cauchy**<sup>1</sup> s'écrit sous forme matricielle dans le repère  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$$

où les composantes du **tenseur des contraintes**  $[\sigma(M)]$  sont :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

1. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

# Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

La **formule de Cauchy**<sup>1</sup> s'écrit sous forme matricielle dans le repère  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$$

où les composantes du **tenseur des contraintes**  $[\sigma(M)]$  sont :

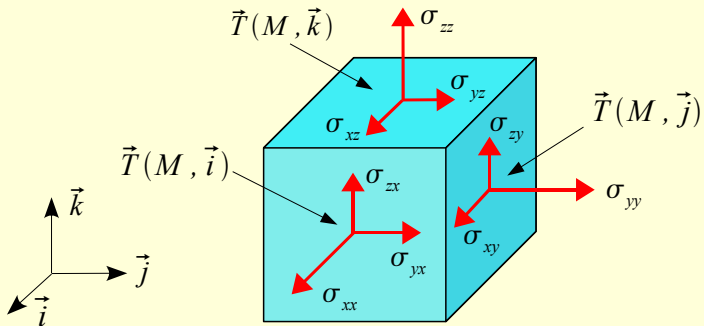
$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{matrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right] \end{matrix}$$

La **contrainte normale** sur la facette  $\vec{n}$  a pour expression :

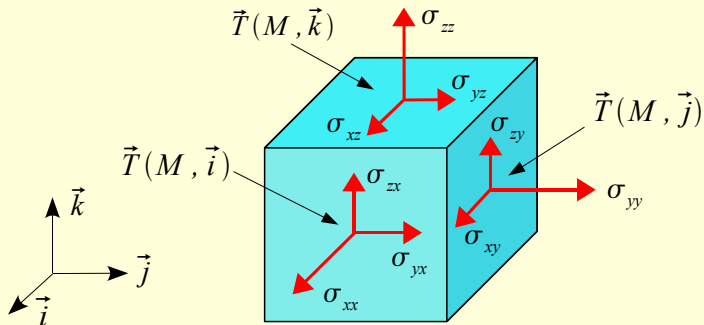
$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\}$$

1. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

# Composantes du tenseur des contraintes

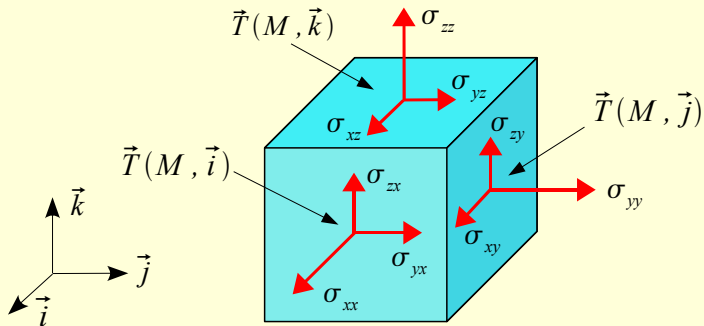


# Composantes du tenseur des contraintes



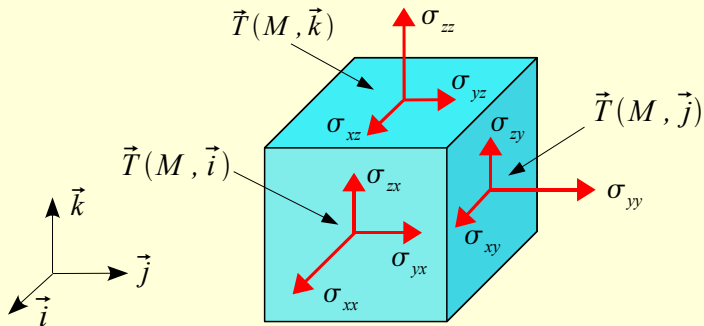
$$\text{facette } \vec{i} : \quad \vec{T}(M, \vec{i}) = \underbrace{\sigma_{xx}}_{\text{contrainte normale}} \vec{i} + \underbrace{\sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k}}_{\text{vecteur cisaillement}}$$

# Composantes du tenseur des contraintes



$$\begin{aligned}
 \text{facette } \vec{j} : \quad \vec{T}(M, \vec{j}) &= \sigma_{xy} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \sigma_{zy} \vec{k} \\
 &= \underbrace{\sigma_{yy}}_{\text{contrainte normale}} \vec{j} + \underbrace{\sigma_{xy} \vec{i} + \sigma_{zy} \vec{k}}_{\text{vecteur cisaillement}}
 \end{aligned}$$

# Composantes du tenseur des contraintes



$$\begin{aligned}
 \text{facette } \vec{k} : \quad \vec{T}(M, \vec{k}) &= \sigma_{xz} \vec{i} + \sigma_{yz} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} \\
 &= \underbrace{\sigma_{zz}}_{\text{contrainte normale}} \vec{k} + \underbrace{\sigma_{xz} \vec{i} + \sigma_{yz} \vec{j}}_{\text{vecteur cisaillement}}
 \end{aligned}$$

# Équations d'équilibre

Équilibre en translation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \gamma_x \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z \end{array} \right.$$

$\vec{f}$  est la force par unité de volume

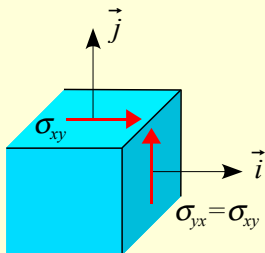
$\rho$  est la masse volumique

$\vec{\gamma}$  est l'accélération du point de coordonnées  $x, y, z$

# Équations d'équilibre

Équilibre en rotation (réciprocité des contraintes tangentes) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$



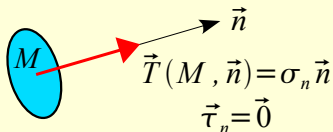
Le tenseur des contraintes est symétrique :  $[\sigma]^T = [\sigma]$ .

Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont deux facettes quelconques en  $M$ , on a :

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}') = \vec{n}' \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

## Contraintes et directions principales

Existe-t-il en  $M$  une facette  $\vec{n}$  telle que le vecteur contrainte sur cette facette soit colinéaire avec  $\vec{n}$  ?

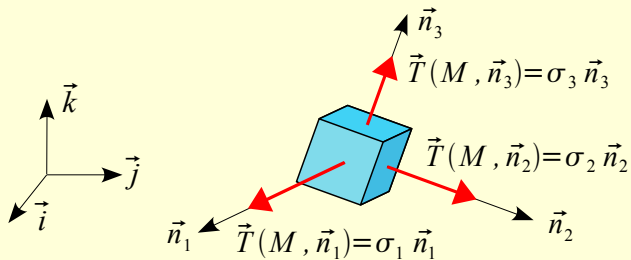


Le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  satisfait la relation :

$$\boxed{\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{[\sigma]\{n\} = \sigma_n \{n\}}$$

$\sigma_n$  est **valeur propre** de la matrice  $[\sigma]$  et  $\{n\}$  est le **vecteur propre** associé.

Le tenseur des contraintes  $[\sigma]$  étant **symétrique** et à **coefficients réels**, il existe en tout point  $M$  d'un solide un **repère orthonormé**  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  tel que sur les facettes  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  le vecteur cisaillement soit nul.



Les directions  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  sont les **directions principales**.

Les contraintes normales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les **contraintes principales**.

Les trois **contraintes principales** sont les **racines du polynôme caractéristique** :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère  $\{M; x, y, z\}$ .

$I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont des **invariants** :

$$I_1 = \text{tr} [\sigma] \quad , \quad I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr} [\sigma])^2 - \text{tr} [\sigma]^2) \quad , \quad I_3 = \det[\sigma]$$

Les trois **contraintes principales** sont les **racines du polynôme caractéristique** :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère  $\{M; x, y, z\}$ .  
 $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont des **invariants** :

$$I_1 = \text{tr} [\sigma] \quad , \quad I_2 = \frac{1}{2} \left( (\text{tr} [\sigma])^2 - \text{tr} [\sigma]^2 \right) \quad , \quad I_3 = \det[\sigma]$$

Dans le **repère principal**  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

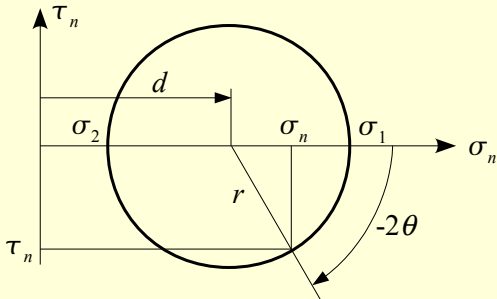
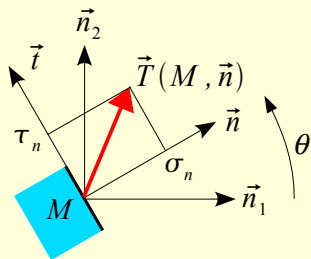
# Cercle de Mohr des contraintes

Sur la facette  $\vec{n}$  passant par la direction principale  $\vec{n}_3$  en  $M$ , le vecteur contrainte est :

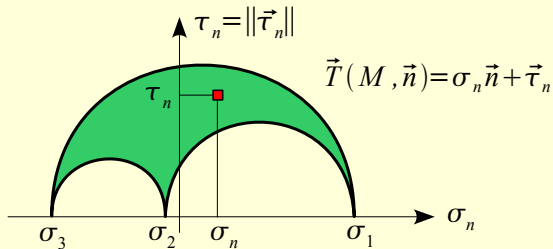
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

avec :

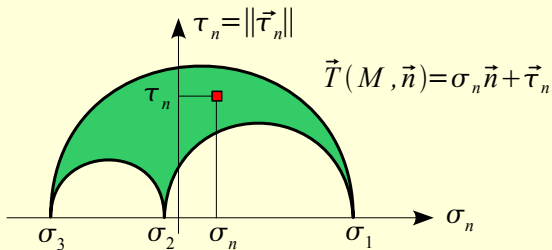
$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases}, \quad d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



# Cercles de Mohr des contraintes



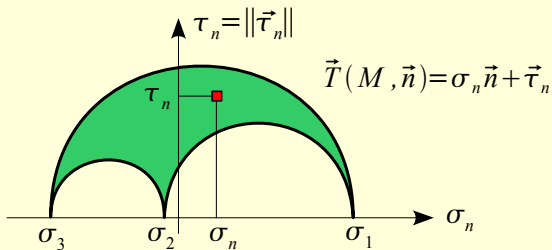
# Cercles de Mohr des contraintes



Contrainte normale maximale :

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

# Cercles de Mohr des contraintes



Contrainte normale maximale :

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

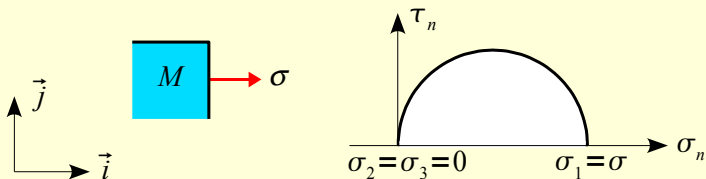
Cisaillement maximal :

$$2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

# État de contrainte uniaxial (traction simple)

L'état de contrainte en un point  $M$  est uniaxial par rapport à la direction  $\vec{i}$ , si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



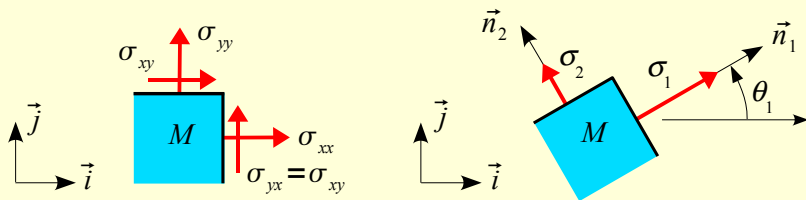
Les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \sigma \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

# État de contrainte plan

En un point  $M$ , l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\vec{k}$  est direction principale :  $\vec{n}_3 = \vec{k}$ .

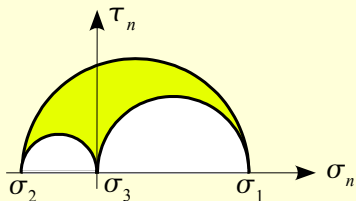
# État de contrainte plan

Les contraintes principales sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

La direction principale  $\vec{n}_1$  est :

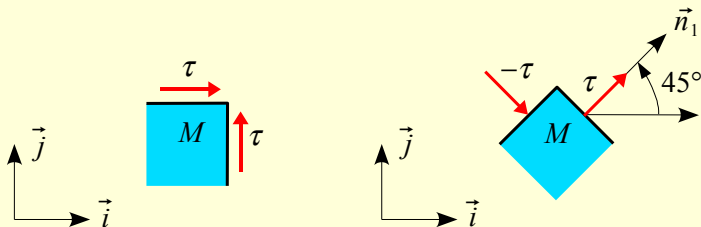
$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$$



# Cisaillement simple

L'état de contrainte en  $M$  est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



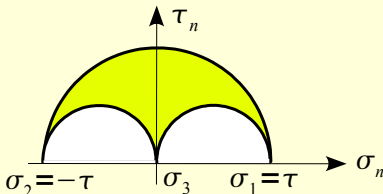
# Cisaillement simple

Les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

La direction principale  $\vec{n}_1$  est :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\theta_1 = 45^\circ)$$



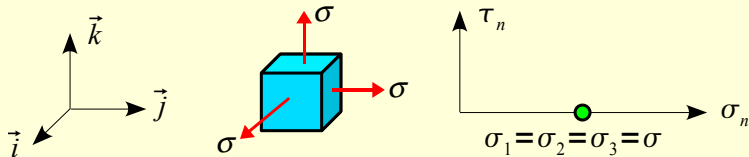
# État de contrainte isotrope

L'état de contrainte en un point  $M$  est isotrope (ou sphérique) si :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} \quad \forall \vec{n}$$

Toute facette  $\vec{n}$  en  $M$  est face principale. Les contraintes principales sont égales à  $\sigma$  et le tenseur des contraintes en  $M$  a pour expression (quelque soit le repère) :

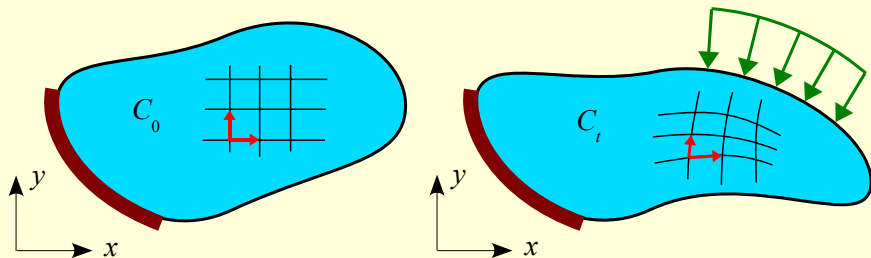
$$[\sigma(M)] = \sigma [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$



Les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent à un point.

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations**
  - Vecteur déplacement
  - Transformation d'un vecteur
  - Tenseur des dilatations
  - Tenseur des déformations de Green-Lagrange
  - Transformation des longueurs et des angles
  - Petits déplacements et petites déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations**.



Le volume occupé par le solide à l'instant  $t$  est noté  $C_t$  et appelé **configuration courante**. La **configuration initiale**  $C_0$  est la configuration de référence.

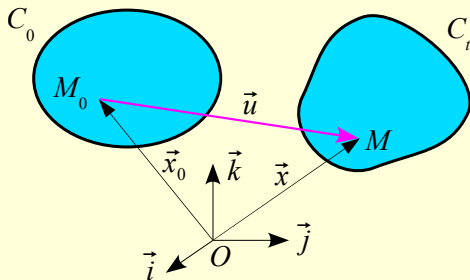
# Vecteur déplacement

Le point  $M_0$  de la configuration initiale :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$$

devient le point  $M$  de la configuration courante :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$



On appelle **vecteur déplacement** du point  $M_0$  le vecteur :

$$\vec{u}(M_0; t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{x}(M_0; t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(M_0; t)}$$

Les coordonnées du point  $M$  s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0; t) \\ v(x_0, y_0, z_0; t) \\ w(x_0, y_0, z_0; t) \end{Bmatrix}$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des fonctions continues et dérivables de  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et  $t$ .

$x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  sont les **coordonnées de Lagrange**<sup>2</sup> et la description est dite lagrangienne.

---

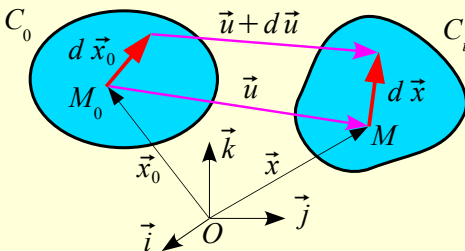
2. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

# Transformation d'un vecteur

Le vecteur infiniment petit  $d\vec{x}_0$  en  $M_0$  devient  $d\vec{x}$  en  $M$  dans la configuration  $C_t$  :

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u}$$

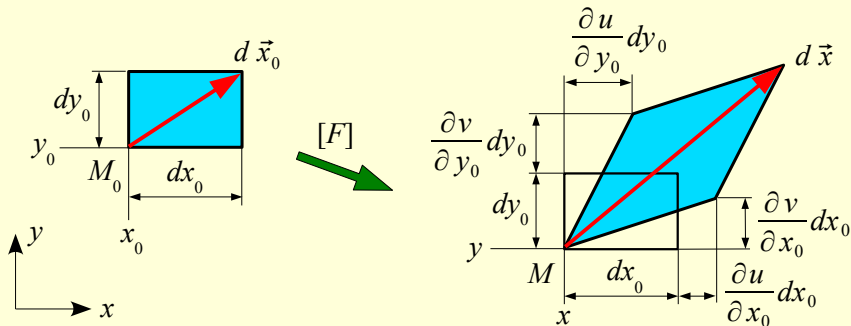
$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = ([I] + [L]) \{dx_0\} = [F] \{dx_0\}$$



$[F]$  est le **tenseur gradient de la transformation**

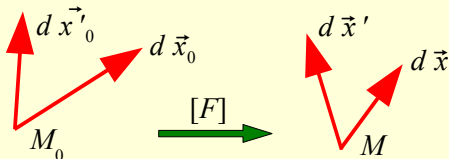
Si le problème est plan par rapport à la direction  $\vec{k}$  :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Tenseur des dilatations

Les vecteurs infiniment petits  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$  en  $M_0$  deviennent  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  en  $M$  dans la configuration  $C_t$  :



Le produit scalaire des deux vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \{dx'\} = \{dx_0\}^T [F]^T [F] \{dx'_0\} = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\}$$

où :

$$[C] = [F]^T [F] = [I] + [L]^T + [L] + [L]^T [L]$$

est le **tenseur des dilatations** ;  $[C]$  est défini positif :

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0\} > 0 \quad \forall d\vec{x}_0 \neq \vec{0}$$

# Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Soit  $ds_0$  la longueur du vecteur  $d\vec{x}_0$  et  $ds$  celle du vecteur  $d\vec{x}$ . La différence  $ds^2 - ds_0^2$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\
 &= \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\
 &= 2 \{dx_0\}^T [E] \{dx_0\}
 \end{aligned}$$

où  $[E]$  est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange** :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2} ([L]^T + [L])}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2} [L]^T [L]}_{\text{termes non linéaires}}$$

# Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Soit  $ds_0$  la longueur du vecteur  $d\vec{x}_0$  et  $ds$  celle du vecteur  $d\vec{x}$ . La différence  $ds^2 - ds_0^2$  s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\ &= 2 \{dx_0\}^T [E] \{dx_0\} \end{aligned}$$

où  $[E]$  est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange** :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2} ([L]^T + [L])}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2} [L]^T [L]}_{\text{termes non linéaires}}$$

Si  $[E]$  est nul, le voisinage de  $M_0$  subit un **mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation)** lors de la transformation.

Si le problème est plan par rapport à la direction  $\vec{k}$ , les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange dans le repère  $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  sont :

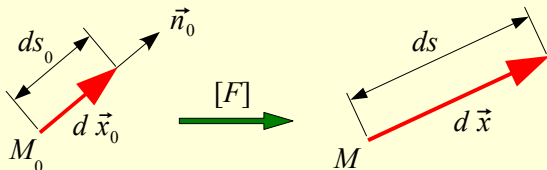
$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{yx} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec (« notation de Voigt ») :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} = E_{yx} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \end{array} \right\}}_{\text{termes linéaires}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} \end{array} \right\}}_{\text{termes non linéaires}}$$

*Remarque* : les composantes du tenseur des déformations sont sans dimension.

## Transformation des longueurs et des angles

Considérons en  $M_0$  le **vecteur infiniment petit**  $d\vec{x}_0$  de longueur  $ds_0$  porté par le vecteur unitaire  $\vec{n}_0$  :  $d\vec{x}_0 = ds_0 \vec{n}_0$ . Ce vecteur devient  $d\vec{x}$  de longueur  $ds$  dans la configuration  $C_t$ .



On appelle **dilatation** en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^T [C] \{n_0\}} = \sqrt{1 + 2 \{n_0\}^T [E] \{n_0\}}$$

*Remarque* : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  :

$$\lambda(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} = \sqrt{1 + 2 E_{xx}}$$

On appelle **déformation de Green-Lagrange** en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \{n_0\}^T [E] \{n_0\}$$

*Remarque* : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{i}) = E_{xx}$$

On appelle **déformation de Green-Lagrange** en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \{n_0\}^T [E] \{n_0\}$$

*Remarque* : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{i}) = E_{xx}$$

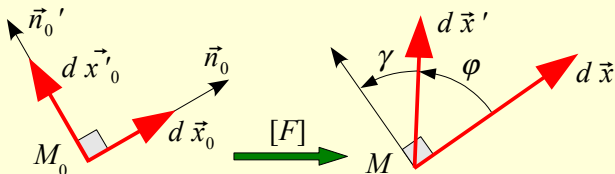
On appelle **allongement unitaire** en  $M_0$  dans la direction  $\vec{n}_0$  la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1$$

*Remarque* : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  :

$$\varepsilon(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{xx}} - 1$$

Considérons en  $M_0$  deux vecteurs infiniment petits  $d\vec{x}_0$  et  $d\vec{x}'_0$  portés par les deux directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$ . Ces vecteurs deviennent  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$  dans la configuration  $C_t$ .



Soit  $\varphi$  l'angle que font entre eux les vecteurs  $d\vec{x}$  et  $d\vec{x}'$ .

On appelle **glissement** (variation angulaire) en  $M_0$  dans les **directions orthogonales**  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$  la quantité :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Le glissement en  $M_0$  dans les directions orthogonales  $\vec{n}_0$  et  $\vec{n}'_0$  est égal à :

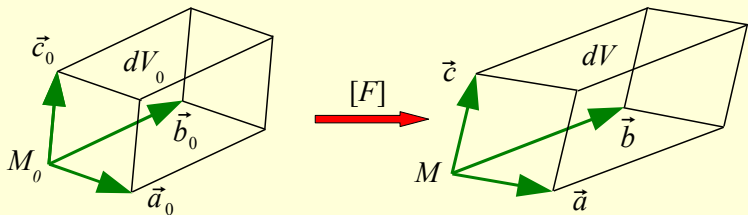
$$\begin{aligned} \gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) &= \arcsin \frac{\{n_0\}^T [C] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \\ &= \arcsin \frac{2 \{n_0\}^T [E] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \end{aligned}$$

*Remarque* : si  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  et  $\vec{n}'_0 = \vec{j}$  :

$$\begin{aligned} \gamma(M_0, \vec{i}, \vec{j}) &= \arcsin \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx} C_{yy}}} \\ &= \arcsin \frac{2 E_{xy}}{\sqrt{(1 + 2 E_{xx}) (1 + 2 E_{yy})}} \end{aligned}$$

Le parallélépipède de volume infiniment petit  $dV_0$  construit en  $M_0$  sur les vecteurs  $\vec{a}_0$ ,  $\vec{b}_0$  et  $\vec{c}_0$  devient le parallélépipède de volume  $dV$  construit en  $M$  sur les vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ . On a :

$$dV = \det[F] dV_0$$



On appelle **déformation volumique** en  $M_0$ , la quantité :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1$$

# Petits déplacements et petites déformations

- Les **déplacements** sont **petits** par rapport aux dimensions du solide.

# Petits déplacements et petites déformations

- Les **déplacements** sont **petits** par rapport aux dimensions du solide.
- Les **dérivées des déplacements** par rapport à  $x_0, y_0, z_0$  sont **petites devant l'unité** :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right| \ll 1 \quad , \quad \dots$$

Si  $f$  une fonction de  $x_0, y_0, z_0$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y_0} &\simeq \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$[E] \simeq \frac{1}{2} ([L]^T + [L]) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Le tenseur  $[\varepsilon]$  est appelé **tenseur des déformations linéarisé**.

Le tenseur des dilatations se réduit à :

$$[C] \simeq [I] + 2[\varepsilon]$$

La **dilatation** et l'**allongement unitaire** en  $M$  dans la direction  $\vec{n}$  s'écrivent :

$$\lambda(M, \vec{n}) \simeq 1 + \{n\}^T [\varepsilon] \{n\}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}) &\simeq \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} \\ &= \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z \end{aligned}$$

Si  $\vec{n}$  est l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\lambda(M, \vec{i}) \simeq 1 + \varepsilon_{xx} \quad , \quad \lambda(M, \vec{j}) \simeq 1 + \varepsilon_{yy} \quad , \quad \lambda(M, \vec{k}) \simeq 1 + \varepsilon_{zz}$$

$$\varepsilon(M, \vec{i}) \simeq \varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{j}) \simeq \varepsilon_{yy} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{k}) \simeq \varepsilon_{zz}$$

La **déformation volumique** en  $M$  se réduit à :

$$\varepsilon_V(M) \simeq \text{tr} [\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{u}$$

Le **glissement** en  $M$  dans les **directions orthogonales**  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  s'écrit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') \simeq 2 \{n'\}^T [\varepsilon] \{n\}$$

Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) \simeq \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \simeq \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) \simeq \gamma_{yz}$$

Le **glissement** en  $M$  dans les **directions orthogonales**  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  s'écrit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') \simeq 2 \{n'\}^T [\varepsilon] \{n\}$$

Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) \simeq \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \simeq \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) \simeq \gamma_{yz}$$

En  $M$ , dans le **repère principal**  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

où  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont les **déformations principales**.

Le **glissement** en  $M$  dans les **directions orthogonales**  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  s'écrit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') \simeq 2 \{n'\}^T [\varepsilon] \{n\}$$

Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont l'un des axes  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) \simeq \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \simeq \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) \simeq \gamma_{yz}$$

En  $M$ , dans le **repère principal**  $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

où  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont les **déformations principales**.

Les **dilatations principales** sont :

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_2 \quad , \quad \lambda_3 = 1 + \varepsilon_3$$

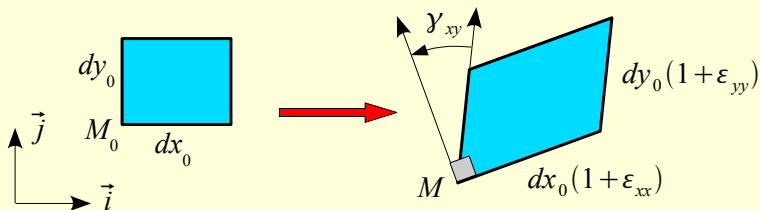
**Problème plan** : transformation d'un rectangle infiniment petit construit en  $M_0$  sur les axes  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

- Allongements unitaires dans les directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

$$\varepsilon(M_0, \vec{i}) = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon(M_0, \vec{j}) = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

- Glissement des deux directions orthogonales  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

$$\gamma(M_0, \vec{i}, \vec{j}) = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

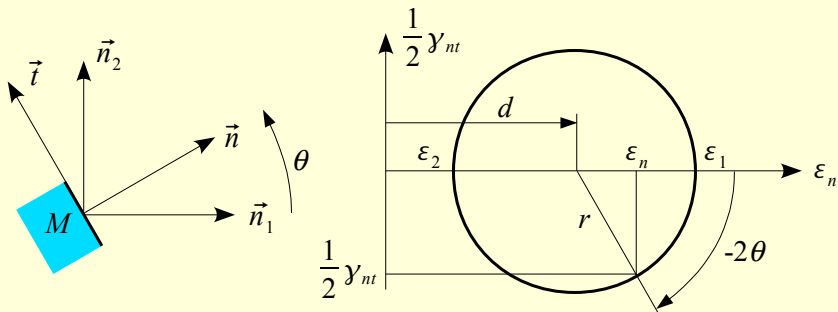


# Cercle de Mohr des déformations

Soit  $\vec{n}$  une facette passant par la direction principale  $\vec{n}_3$  en  $M$ .

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = d + r \cos(-2\theta) \\ \frac{1}{2} \gamma_{nt} = \frac{1}{2} \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec}$$

$$d = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad , \quad r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$



- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement**
- 5 Critères de limite élastique
- 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie
- 7 Références

# Loi de comportement

Pour un **matériau isotrope**, les déformations et les contraintes sont liées par la **loi de comportement** (ou **loi constitutive**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right.$$

- $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  sont respectivement le **module de Young**, le **coefficient de Poisson** et le **coefficient de dilatation** du matériau.
- $\Delta T$  est la variation de température.

# Caractéristiques de quelques matériaux

$E$  : module de Young

$\nu$  : coefficient de Poisson ( $0 \leq \nu \leq 1/2$ )

$\sigma_E$  : limite élastique

$\alpha$  : coefficient de dilatation

$\rho$  : masse volumique

Matériau	$E$ MPa	$\nu$	$\sigma_E$ MPa	$\alpha$ $10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
Acier inox	203 000	0.29	200	15	7850
Aluminium	67 500	0.34	30	24	2700
Cuivre	100 000	0.34	40	16.5	8930
Plexiglas	2 900	0.4	80	85	1800

Référence : [3] S. LAROZE : *Mécanique des structures*.

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique**
  - Critère de Rankine
  - Critère de Tresca
  - Critère de Von Mises
- 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie
- 7 Références

## Critère de limite élastique

Soient  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les trois contraintes principales en un point d'un solide. Nous supposons que la limite élastique  $\sigma_E$  en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple.

**Comment vérifier, dans un état de contrainte complexe, que la limite élastique n'est pas dépassée ?**

On admet que la limite élastique est atteinte lorsqu'une certaine fonction  $f$  des contraintes principales est égale à limite élastique du matériau en traction simple :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_E$$

Le **domaine élastique** en un point du solide est donc défini par la relation :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

# Critère de Rankine

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_R$  est appelée **contrainte équivalente de Rankine**<sup>3</sup> ou de la **contrainte normale maximale**.

---

3. William Rankine (1820-1872).

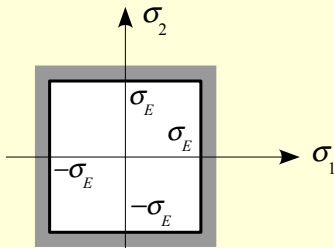
# Critère de Rankine

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_R$  est appelée **contrainte équivalente de Rankine**<sup>3</sup> ou de la **contrainte normale maximale**.

État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) :



3. William Rankine (1820-1872).

# Critère de Tresca

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_T = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_T$  est appelée **contrainte équivalente de Tresca**<sup>4</sup>.

---

4. Henri Tresca (1814-1885).

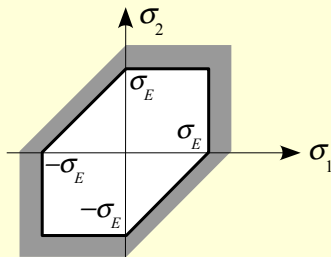
# Critère de Tresca

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_T = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_T$  est appelée **contrainte équivalente de Tresca**<sup>4</sup>.

État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) :



4. Henri Tresca (1814-1885).

# Critère de Von Mises

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_{VM}$  est la **contrainte équivalente de Von Mises**<sup>5</sup>.

---

5. Richard Von Mises (1883-1953).

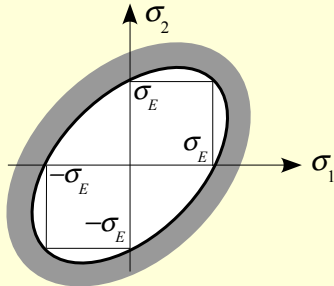
# Critère de Von Mises

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E$$

La quantité  $\sigma_{VM}$  est la **contrainte équivalente de Von Mises**<sup>5</sup>.

État plan de contraintes ( $\sigma_3 = 0$ ) :

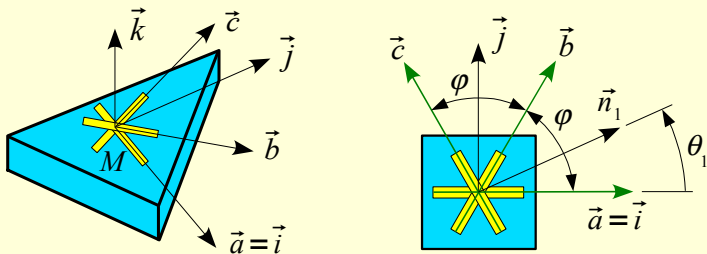


5. Richard Von Mises (1883-1953).

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique
- 6** Dépouillement des rosettes d'extensométrie
  - Principe
  - Rosette à 45 degrés
  - Rosette à 120 degrés
  - Contraintes et les déformations principales

## Rosette d'extensométrie

Une **rosette d'extensométrie** est un ensemble de trois jauges de déformation collées en un point  $M$  d'un solide . Soient  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  les vecteurs unitaires portés par les jauges.



Soient  $\vec{k}$  le vecteur unitaire normal en  $M$  à la surface, dirigé vers l'extérieur du solide et  $\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  le repère orthonormé tel que  $\vec{i} = \vec{a}$ .

La direction  $\vec{k}$  est direction principale et en l'absence de pression extérieure, la contrainte principale correspondante est nulle : l'état de contrainte est plan. Le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations ont pour expression dans le repère  $\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

avec les **relations de comportement** (en l'absence de gradient thermique) :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

où  $E$  et  $\nu$  sont les caractéristiques élastiques du matériau.

La mesure de l'allongement unitaire dans trois directions  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  faisant entre elles un angle égal à  $\varphi$  :

$$\varepsilon_a = \varepsilon(M, \vec{a}) \quad , \quad \varepsilon_b = \varepsilon(M, \vec{b}) \quad , \quad \varepsilon_c = \varepsilon(M, \vec{c})$$

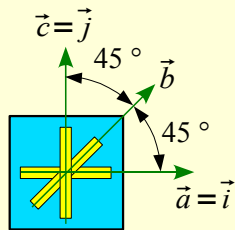
donne trois équations :

$$\varepsilon(M, \vec{n} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} + n_x n_y \gamma_{xy}$$

qui, ajoutées aux quatre relations de comportement, permet la détermination de l'état de déformation (4 inconnues) et de l'état de contrainte (3 inconnues) en  $M$ .

*Remarque* : dans la pratique, l'angle  $\varphi$  que font entre elles les jauges est égal à 45 ou 120 degrés.

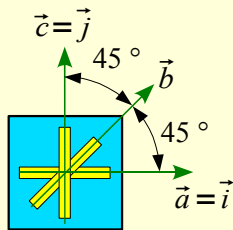
# Rosette à 45 degrés



# Rosette à 45 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

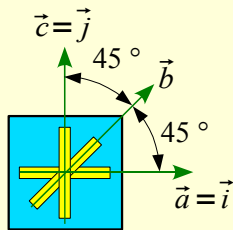
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \end{array} \right.$$



# Rosette à 45 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

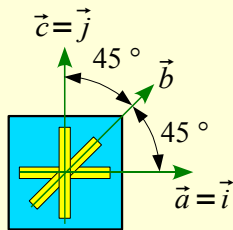
$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{cases}$$



# Rosette à 45 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{yy} \end{cases}$$

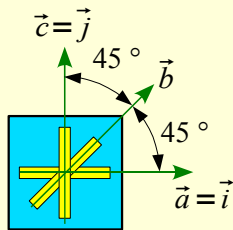


# Rosette à 45 degrés

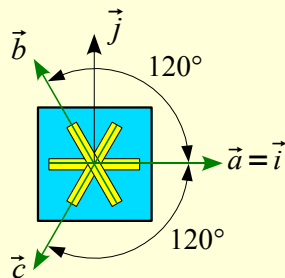
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{yy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c \end{cases}$$



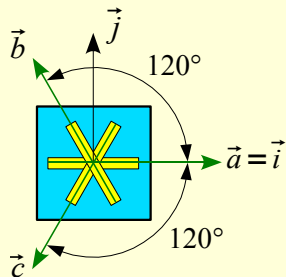
# Rosette à 120 degrés



# Rosette à 120 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

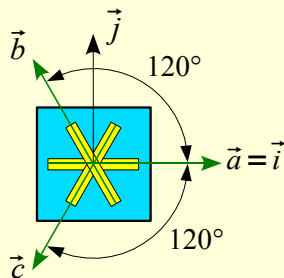
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \end{array} \right.$$



# Rosette à 120 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

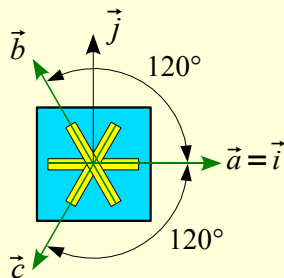
$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{4}\varepsilon_{xx} + \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \end{cases}$$



# Rosette à 120 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \end{cases}$$

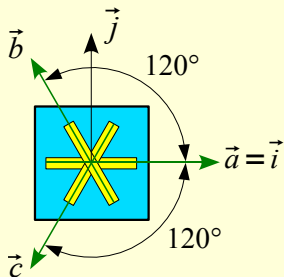


# Rosette à 120 degrés

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3} (2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a) \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_c - \varepsilon_b) \end{cases}$$



Les contraintes et les déformations principales sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Les directions principales sont :







$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = 2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{xx}}{\gamma_{xy}}$$

- 1 Présentation et hypothèses
- 2 Contraintes
- 3 Déformations
- 4 Loi de comportement
- 5 Critères de limite élastique
- 6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie
- 7 Références**

# Références

-  F. FREY – *Traité du génie civil, Volume 3. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des solides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
-  D. GAY et J. GAMBELIN – *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
-  S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 1. Solides élastiques. Plaques et coques*, Cépaduès, 2005.
-  J. LEMAITRE, P.-A. BOUCARD et F. HILD – *Résistance mécanique des solides*, Dunod, 2007.
-  J. SALENÇON – *Mécanique des milieux continus, Tome 1. Concepts généraux*, Éditions de l'École polytechnique, 2005.
-  S. P. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER – *Théorie de l'élasticité*, 2 éd., Béranger, 1968.