

# RDM 6 : mémorisation des matrices globales, méthodes de calculs

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*26 juin 2006 – 21 juin 2011*

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Partition des degrés de liberté</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Mémorisation des matrices globales</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Résolution d'un système d'équations linéaires</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Recherche des valeurs et vecteurs propres</b>	<b>6</b>
5.1	Présentation . . . . .	6
5.2	Méthode d'itération inverse . . . . .	8
5.3	Méthode d'itération sur sous-espace . . . . .	8
5.4	Décalage du spectre de valeurs propres . . . . .	9
5.5	Éditions des résultats . . . . .	10
	<b>Références</b>	<b>11</b>



# 1 Présentation

Les principales étapes du calcul sont :

## Vérification des données

## Construction des tables :

- Construction de la table des nœuds et de la table des éléments
- Partition des degrés de liberté
- Calcul de la place mémoire nécessaire au calcul
- Segmentation des matrices globales

## Calcul des matrices élémentaires et assemblage des matrices globales :

- Matrice de rigidité
- Matrice de masse pour une analyse dynamique
- Matrice de rigidité géométrique pour la recherche des charges critiques
- Vecteur(s) force(s) pour une analyse statique

## Factorisation de la matrice de rigidité globale :

$$[K] = [L] [D] [L]^T$$

## Analyse statique :

Pour chaque problème statique :

- Résolution du système d'équations linéaires :

$$[K] \{U_i\} = \{F_i\}$$

où  $i$  est le numéro du problème (cas simple ou combinaison). S'il y a des déplacements imposés non nuls, le logiciel génère un cas de charges 0 qui se réduit aux déplacements imposés.

- Édition d'un fichier neutre

## Analyse dynamique :

- Résolution du problème aux valeurs propres :

$$[K] \{U\} = \omega^2 [M] \{U\}$$

- Édition d'un fichier neutre

### Flambement linéaire

- Résolution du problème aux valeurs propres :

$$[K] \{U\} = -\lambda [M] \{U\}$$

- Édition d'un fichier neutre

À la fin du calcul, le logiciel génère un fichier dont l'extension est **.res**. Ce fichier contient des informations sur le déroulement du calcul.

## 2 Partition des degrés de liberté

Références : [1, 9, 11]

Les degrés de liberté de la structure (d.d.l.) sont numérotés de façon à obtenir la partition de ceux-ci en trois sous-ensembles :

- Déplacements inconnus : ( $L$ )
- Déplacements connus non nuls : ( $P$ )
- Déplacements nuls : ( $S$ )

La partition des d.d.l. induit une partition des matrices globales : vecteur force  $\{F\}$ , vecteur déplacement  $\{U\}$ , matrice de rigidité  $[K]$ , ... :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}, \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] & [K_{LS}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] & [K_{PS}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] & [K_{SS}] \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Les lignes et les colonnes associées aux déplacements nuls ne sont jamais assemblées.

La partition des d.d.l. est effectuée avant la segmentation en blocs des matrices globales (voir mémorisation des matrices globales).

### Analyse statique :

Les équations d'équilibre  $\{F\} = [K] \{U\}$  s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont solution du système d'équations :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\}$$

### Analyse dynamique :

Le problème aux valeurs propres  $[K] \{U\} = \omega^2 [M] \{U\}$  se réduit à :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \omega^2 [M_{LL}] \{U_L\}$$

### 3 Mémorisation des matrices globales

**Références** : [3, 5, 9]

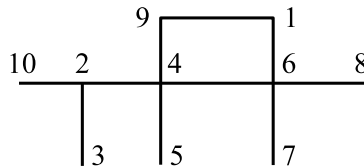
Un calcul de structure par la méthode des éléments finis nécessite souvent d'importantes ressources informatiques (**temps de calcul et place mémoire**).

Ces ressources peuvent être diminuées par :

- le choix de méthodes de résolution qui utilisent les propriétés des matrices globales (symétrie, matrice bande, ...).
- la renumérotation des nœuds.

Dans « RDM », les **matrices globales** (matrice de rigidité, matrice masse, ...) sont stockées selon la **méthode profil** ou « ligne de ciel ». Elles sont de plus décomposées en **blocs** qui sont mémorisés sur le **disque**.

Considérons la structure (10 nœuds, 10 éléments) représentée sur la figure et supposons, pour simplifier, que chaque nœud possède un seul degré de liberté :



L'**assemblage** conduit à la matrice de rigidité globale :

$$[K] = \begin{bmatrix} \times & . & . & . & . & \times & . & . & \times & . \\ . & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & \times \\ . & \times & \times & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \times & . & \times & \times & \times & . & . & \times & . \\ . & . & . & \times & \times & . & . & . & . & . \\ \times & . & . & \times & . & \times & \times & \times & . & . \\ . & . & . & . & . & \times & \times & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \times & . & \times & . & . \\ \times & . & . & \times & . & . & . & . & \times & . \\ . & \times & . & . & . & . & . & . & . & \times \end{bmatrix}$$

où chaque  $\times$  représente un terme non nul. Dans cette matrice, la contribution de l'élément 4 – 6 est localisée en [4, 4], [4, 6], [6, 4] et [6, 6].

Le stockage de cette matrice nécessite la mémorisation de  $10 \times 10 = 100$  réels. Si l'on tient compte de la symétrie de la matrice de rigidité, il suffit de mémoriser les termes situés sur la diagonale et au dessus de la diagonale soit  $(10 \times 11)/2 = 55$  réels.

Lors de la factorisation de la matrice de rigidité, les termes nuls situés sur une colonne au dessus du premier terme non nul n'interviennent pas. Il n'est pas utile de les stocker.

Les termes « utiles » de la matrice de rigidité sont mémorisés, colonne par colonne, dans une matrice





sont strictement positifs.

2. Résolution du système triangulaire inférieur :

$$[L]\{Y\} = \{F\}$$

3. Résolution du système diagonal :

$$\{X\} = [D]^{-1} \{Y\}$$

4. Résolution du système triangulaire supérieur :

$$[L]^T \{U\} = \{X\}$$

## 5 Recherche des valeurs et vecteurs propres

Références : [2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 10]

### 5.1 Présentation

Résoudre le problème aux valeurs propres consiste à trouver les couples  $(\lambda, \{u\})$  qui satisfont l'équation :

$$[K] \{u\} = \lambda [M] \{u\} \quad \text{avec} \quad \{u\} \neq \{0\} \quad (5.1)$$

Les problèmes traités sont les suivants :

#### Recherche des modes propres de vibration

Le problème à résoudre s'écrit :

$$[K] \{u\} = \omega^2 [M] \{u\} \quad (5.2)$$

où

- $[K]$  est la matrice de rigidité de la structure.
- $[M]$  est la matrice de masse.
- $\omega$  est une pulsation propre.
- $\{u\}$  est le vecteur des déplacements associé à la pulsation  $\omega$ .

*Remarque* : dans « RDM », les matrices de masse sont consistantes.

#### Flambement linéaire

Le problème à résoudre s'écrit :

$$[K] \{u\} = -\lambda_C [K_\sigma] \{u\} \quad (5.3)$$

où

- $[K]$  est la matrice de rigidité de la structure.
- $[K_\sigma]$  est la matrice de rigidité géométrique.
- $\lambda_C$  est un coefficient de charge critique.
- $\{u\}$  est le vecteur des déplacements associé à  $\lambda_C$ .

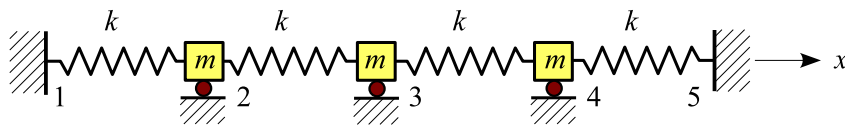
*Remarque 1* : en fait, on résout le problème aux valeurs propres :

$$[K_{LL}] \{u_L\} = \lambda [M_{LL}] \{u_L\} \quad (\S \text{ Partition des degrés de liberté}) \quad (5.4)$$

*Remarque 2* : les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det ([K_{LL}] - \lambda [M_{LL}]) = 0 \quad (5.5)$$

*Remarque 3* : le nombre de modes propres demandés ne doit pas excéder le nombre de degrés de liberté excités. Plus précisément, en l'absence de modes rigides (la structure est isostatique ou hyperstatique intérieurement et extérieurement), ce nombre est égal au rang de la matrice  $[M_{LL}]$ . Considérons, par exemple, la structure suivante :



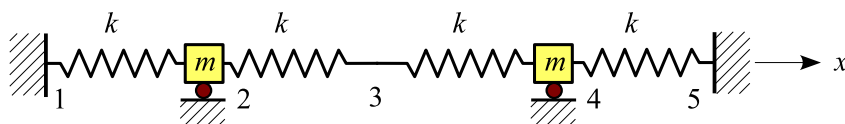
Les matrices  $[K_{LL}]$  et  $[M_{LL}]$  sont égales à :

$$[K_{LL}] = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}, \quad [M_{LL}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Cette structure possède autant de modes propres de vibration que de degrés de liberté. Les trois pulsations propres sont (en rad/s) :

$$\omega_1 = 0.7654 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.4142 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.8478 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.7)$$

Supprimons la masse portée par le nœud 3 :



Le nombre de degrés de liberté et la matrice  $[K_{LL}]$  ne changent pas. Par contre, la matrice  $[M_{LL}]$  devient :

$$[M_{LL}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Le nombre de modes propres de cette structure est égal à 2 et les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_2 = 1.4142 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.9)$$

Deux méthodes de calcul sont proposées : la **méthode d'itération inverse** et la **méthode d'itération sur sous-espace**.

## 5.2 Méthode d'itération inverse

Cette méthode est bien adaptée au calcul de la plus petite valeur propre.

L'algorithme est le suivant :

1. Choix d'un vecteur de départ :  $\{u_0\}$ .
2. A la  $i^e$  itération, on effectue les opérations suivantes :

- (a) Résolution du système linéaire :

$$[K] \{u_i\} = [M] \{u_{i-1}\} \quad (5.10)$$

- (b) Calcul de  $\lambda_i$  par le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_i = \frac{\{u_i\}^T [K] \{u_i\}}{a} \quad \text{avec} \quad a = \{u_i\}^T [M] \{u_i\} \quad (5.11)$$

- (c) Mise à jour du vecteur propre :

$$\{u_i\} = \frac{\{u_i\}}{\sqrt{a}} \quad (5.12)$$

- (d)  $\lambda_i$  et  $\{u_i\}$  convergent respectivement vers la plus petite valeur propre  $\lambda$  et le vecteur propre  $\{u_i\}$  associé.

## 5.3 Méthode d'itération sur sous-espace

Cette méthode permet le calcul des  $m$  plus petites valeurs propres d'un système de grande dimension.

Le problème aux valeurs propres s'écrit alors :

$$[K] [U] = [\Lambda] [M] [U] \quad (5.13)$$

où

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & & & \\ & \lambda^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{(m)} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

est la matrice diagonale des  $m$  plus petites valeurs propres et

$$[U] = [\{u^{(1)}\} \quad \{u^{(2)}\} \quad \dots \quad \{u^{(m)}\}] \quad (5.15)$$

est la matrice des  $m$  vecteurs propres associés.

L'algorithme est le suivant :

1. Choix de  $m$  vecteurs initiaux orthonormés :

$$[U_0] = \left[ \{u_0^{(1)}\} \quad \{u_0^{(2)}\} \quad \dots \quad \{u_0^{(m)}\} \right] \quad (5.16)$$

Les vecteurs de départ sont générés de manière aléatoire, orthogonalisés par la **méthode de Gram-Schmidt** puis normés.

2. À la  $i^e$  itération, on effectue les opérations suivantes :

- (a) Itération inverse simultanée :

$$[K] [X_i] = [M] [U_{i-1}] \quad (5.17)$$

- (b) Analyse d'interaction :

- Calcul des matrices d'interaction :

$$[K_i] = [X_i]^T [K] [X_i] \quad , \quad [M_i] = [X_i]^T [M] [X_i] \quad (5.18)$$

- Résolution du problème aux valeurs propres réduit :

$$[K_i] [Q_i] = [M_i] [Q_i] [\Lambda_i] \quad (5.19)$$

Ce problème est transformé en sa forme classique. La matrice de rigidité réduite est factorisée par la **méthode de Choleski** :

$$[K_i] = [S]^T [S] \quad (5.20)$$

Après multiplication des deux membres de l'équation par  $[S]^{-T}$ , on obtient :

$$[D] [Z] = [Z] [\Lambda]^{-1} \quad (5.21)$$

en posant

$$[Z] = [S] [Q_i] \quad \text{et} \quad [D] = [S]^{-T} [M_i] [S] \quad (5.22)$$

Ce problème aux valeurs propres est résolu par la **méthode de Jacobi**.

- (c) Amélioration de l'approximation des vecteurs propres

$$[U_i] = [X_i] [Q_i] \quad (5.23)$$

Les matrices  $[\Lambda_i]$  et  $[U_i]$  convergent respectivement vers la matrice des valeurs propres  $[\Lambda]$  et la matrice des vecteurs propres  $[U]$ . Les valeurs propres étant classées par ordre de module croissant, le  $k^e$  vecteur de la matrice  $[U_i]$  converge vers le  $k^e$  vecteur propre avec un taux de convergence égal à  $\lambda_k/\lambda_{m+1}$ . Il en résulte que les premiers modes convergent plus vite que les modes d'ordre élevé. Pour améliorer la rapidité de convergence, il est donc intéressant de choisir un sous-espace de dimension  $q$  supérieur à  $m$ . « RDM » utilise la valeur  $q = \min(m + 8, 2m)$  recommandée par [3].

## 5.4 Décalage du spectre de valeurs propres

Remplaçons le problème aux valeurs propres :

$$[K] \{U\} = \omega^2 [M] \{U\} \quad (5.24)$$

par :

$$([K] + \delta^2 [M]) \{U\} = (\omega^2 + \delta^2) [M] \{U\} \quad \text{avec} \quad \delta = 2\pi f \quad (5.25)$$

Les vecteurs propres du nouveau système sont identiques à ceux du système initial. Les valeurs propres  $\omega^2$  sont décalées de  $\delta^2$ .

## 5.5 Éditions des résultats

Après un calcul de modes propres, passez dans le menu **Résultats**, puis :

**Fichier** ⇒ **Éditer** ⇒ **Analyse modale**

Le fichier contient :

1. Pour chaque mode  $i$  ( $f_i, \{U^{(i)}\}$ ) :

(a) La fréquence :  $f_i$  en Hz

(b) La pulsation :  $\omega_i = 2\pi f_i$  en rad/s

(c) La raideur généralisée :

$$k_i = \{U^{(i)}\}^T [K] \{U^{(i)}\}$$

(d) La masse généralisée :

$$m_i = \{U^{(i)}\}^T [M] \{U^{(i)}\}$$

*Remarque* : on a  $k_i = m_i \omega_i^2$

2. La masse totale de la structure :  $M_T$

3. Pour chaque degré de liberté  $d = x, y, z$  :

(a) Pour chaque mode  $i$  :

– Le facteur de participation modale :

$$P_{d,i} = \frac{\{U^{(i)}\}^T [M] \{U_d\}}{m_i}$$

où  $\{U_d\}$  est le vecteur translation unitaire dans la direction  $d$ ; par exemple :

$$\{U_x\}^T = \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0\}$$

– La masse modale effective :

$$M_{d,i}^{\text{eff}} = P_{d,i} \{U^{(i)}\}^T [M] \{U_d\} = \frac{(\{U^{(i)}\}^T [M] \{U_d\})^2}{m_i} = P_{d,i}^2 m_i$$

– Le rapport de la masse effective à la masse totale :

$$\frac{M_{d,i}^{\text{eff}}}{M_T} \times 100 \%$$

(b) La somme des masses effectives :

$$M^{\text{eff}} = \sum_i M_{d,i}^{\text{eff}}$$

(c) Le rapport de la somme des masses effectives à la masse totale :

$$\frac{M^{\text{eff}}}{M_T} \times 100 \%$$

## Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] — , *Dynamics of structures*, North Holland, 1991.
- [3] K.-J. BATHE – *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, 1996.
- [4] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [5] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [6] M. DUBOIS – « Les méthodes numériques applicables au dimensionnement vis-à-vis du flambement », *Flambement*, CETIM, 1995, p. 1–53.
- [7] M. GÉRADIN et D. RIXEN – *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, 2 éd., Masson, 1996.
- [8] T. J. HUGHES – *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover, 2000.
- [9] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [10] M. KÖNIG, D. NAGY et P. STREINER – « Buckling analysis with the aska program system », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **16** (1978), p. 185–212.
- [11] P. THOMAS – *Éléments finis pour l'ingénieur. Grands principes et petites recettes*, Tec & Doc (Collection EDF R&D), 2006.