

Section droite d'une poutre : caractéristiques et contraintes

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

e-mail : yves.debard@univ-lemans.fr
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

26 juin 2006 – 11 février 2010

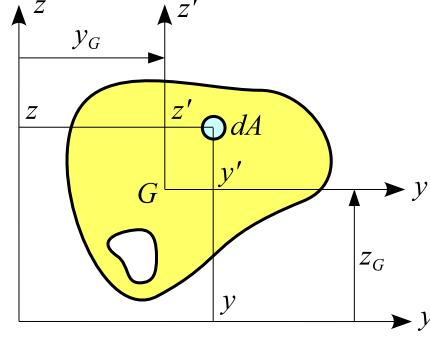
Table des matières

1	Caractéristiques	2
1.1	Définitions	2
1.1.1	Centre de gravité	2
1.1.2	Moments quadratiques	2
1.1.3	Autres caractéristiques	4
1.2	Calculs	5
1.2.1	Calcul de A , M_y , M_z , I_y , I_z et I_{yz}	5
1.2.2	Calcul de β_Y et β_Z	8
1.2.3	Calcul des fonctions de gauchissement	8
1.2.4	Calcul des modules plastiques $W_{pl,Y}$ et $W_{pl,Z}$	9
2	Contraintes	10
	Références	11

1 Caractéristiques

1.1 Définitions

Soient une section droite et $\{O; yz\}$ un repère orthonormé du plan de la section.



On appelle aire de la section la quantité :

$$A = \int_A dA \quad , \quad dA = dy dz \quad (1.1)$$

1.1.1 Centre de gravité

On appelle centre de gravité de la section, le point G dont les coordonnées y_G et z_G sont définies par les relations :

$$\int_A (z - z_G) dA = 0 \quad , \quad \int_A (y - y_G) dA = 0 \quad (1.2)$$

d'où :

$$y_G = \frac{M_z}{A} \quad , \quad z_G = \frac{M_y}{A} \quad (1.3)$$

où :

$$M_y = \int_A z dA \quad , \quad M_z = \int_A y dA \quad (1.4)$$

sont les moments statiques de la section par rapport aux axes y et z .

Le point G est indépendant du choix du repère $\{O; yz\}$.

1.1.2 Moments quadratiques

On appelle moments quadratiques de la section par rapport aux axes y et z , les quantités :

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (1.5)$$

Si l'un des axes est un axe de symétrie, $I_{yz} = 0$.

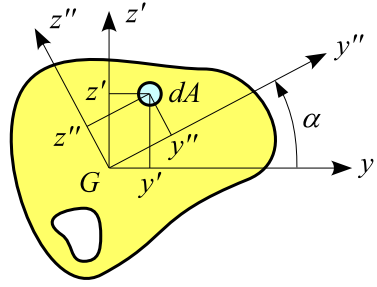
Translation des axes : soit $\{G; y'z'\}$ le repère parallèle à $\{O; yz\}$; on a les relations :

$$y' = y - y_G \quad , \quad z' = z - z_G \quad , \quad \int_A y' dA = 0 \quad , \quad \int_A z' dA = 0 \quad (1.6)$$

d'où (théorème de Huygens) :

$$I_{y'} = I_y - z_G^2 A \quad , \quad I_{z'} = I_z - y_G^2 A \quad , \quad I_{y'z'} = I_{yz} - y_G z_G A \quad (1.7)$$

Rotation des axes : soit le repère orthonormé $\{G; y''z''\}$ faisant un angle α avec le repère $\{G; y'z'\}$.



On a les relations :

$$\begin{Bmatrix} y'' \\ z'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_{y''}(\alpha) &= \int_A z''^2 dA = \int_A (-y' \sin \alpha + z' \cos \alpha)^2 dA \\ &= I_{y'} \cos^2 \alpha + I_{z'} \sin^2 \alpha - 2 I_{y'z'} \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{I_{y'} + I_{z'}}{2} + \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \cos 2\alpha - I_{y'z'} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1.9a)$$

Par un calcul analogue, on obtient :

$$I_{z''}(\alpha) = \int_A y''^2 dA = \frac{I_{y'} + I_{z'}}{2} - \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \cos 2\alpha + I_{y'z'} \sin 2\alpha \quad (1.9b)$$

et :

$$I_{y''z''}(\alpha) = \int_A y''z'' dA = \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \sin 2\alpha + I_{y'z'} \cos 2\alpha \quad (1.9c)$$

Repère central principal : le repère $\{G; y''z''\}$ est le repère principal en G si $I_{y''z''} = 0$, c'est à dire si $\alpha = \alpha_0$ tel que :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}} \quad (1.10)$$

Les quantités $I_Y = I_{y''}(\alpha_0)$ et $I_Z = I_{z''}(\alpha_0)$ sont les moments quadratiques centraux principaux ; le repère $\{G; YZ\}$ est le repère central principal.

Remarques :

- si y' ou z' est un axe de symétrie, le repère $\{G; y'z'\}$ est le repère principal en G .
- le moment quadratique $I_{y''}(\alpha)$ peut s'écrire :

$$I_{y''}(\alpha) = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{y'z'} & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Les axes Y et Z sont donc les directions principales de la matrice $\begin{bmatrix} I_{y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{y'z'} & I_{z'} \end{bmatrix}$, d'où (cours d'élasticité) :

$$\left. \begin{aligned} I_Y = I_{\max} \\ I_Z = I_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{I_{y'} + I_{z'}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y'} - I_{z'})^2 + 4 I_{y'z'}^2} \quad (1.12)$$

et :

$$\tan \alpha_Y = \frac{I_{y'} - I_Y}{I_{y'z'}} \quad , \quad \tan \alpha_Z = \frac{I_{y'} - I_Z}{I_{y'z'}} \quad (\alpha_Z = \alpha_Y + \pi/2) \quad (1.13)$$

1.1.3 Autres caractéristiques

Le module « RDM-Ossatures » évalue les quantités suivantes :

- le **moment d'inertie polaire** (moment de la surface par rapport au centre de gravité) :

$$I_p = \int_A (Y^2 + Z^2) dA = I_Y + I_Z \quad (1.14)$$

- les **constantes de stabilité** :

$$\beta_Y = \int_A Y (Y^2 + Z^2) dA \quad \beta_Z = \int_A Z (Y^2 + Z^2) dA \quad (1.15)$$

- les **modules plastiques** :

$$W_{pl,Y} = \int_A |Z - Z_p| dA \quad W_{pl,Z} = \int_A |Y - Y_p| dA \quad (1.16)$$

où les droites $Y = Y_p$ et $Z = Z_p$ séparent la surface de la section droite en deux surfaces égales.

- les **rayons de girations** :

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} \quad i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} \quad i_O = \sqrt{\frac{I_O}{A}} \quad (1.17)$$

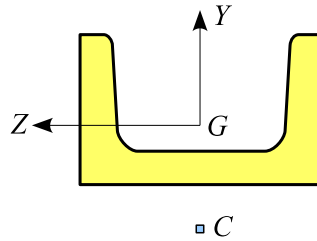
La **constante de torsion de Saint Venant** est égale à :

$$J = \int_A \left(Y \frac{\partial \omega}{\partial Z} - Z \frac{\partial \omega}{\partial Y} + Y^2 + Z^2 \right) dA \quad (1.18)$$

où $\omega(Y, Z)$ est la fonction de gauchissement de torsion. Si la section est circulaire (pleine ou creuse), ω est nul et J se réduit au moment d'inertie polaire I_p .

Le **centre de cisaillement/torsion** est le point de la section qui reste fixe lorsque la force élastique sur la section se réduit à un moment de torsion. Il est défini par :

$$Y_C = -\frac{1}{I_Y} \int_A Z \omega dA \quad , \quad Z_C = \frac{1}{I_Z} \int_A Y \omega dA \quad (1.19)$$



Le **moment d'inertie de rotation** (moment de la surface par rapport au centre de cisaillement) est égal à :

$$I_r = \int_A ((Y - Y_C)^2 + (Z - Z_C)^2) dA = (Y_C^2 + Z_C^2) A + I_p \quad (1.20)$$

La **constante de gauchissement** est définie par :

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad (1.21)$$

La **constante de stabilité** β_ω est définie par :

$$\beta_\omega = \int_A \omega (Y^2 + Z^2) dA \quad (1.22)$$

Les études de stabilité utilisent les coefficients :

$$Y_\beta = \frac{\beta_Y}{2I_Z} - Y_C \quad , \quad Z_\beta = \frac{\beta_Z}{2I_Y} - Z_C \quad (1.23)$$

L'énergie de déformation linéique due à l'effort tranchant est égale à :

$$\frac{T_Y^2}{2GAk_Y} + \frac{T_Z^2}{2GAk_Z} \quad (1.24)$$

où k_Y et k_Z sont les **coefficients d'aire cisailée**. Ces coefficients sont définis par :

$$k_Y = \frac{1}{I_Z} \int_A g Y dA \quad , \quad k_Z = \frac{1}{I_Y} \int_A h Z dA \quad (1.25)$$

où g et h les fonctions de gauchissement associées aux efforts tranchants T_Y et T_Z .

$A_Y = k_Y A$ est l'aire cisailée suivant Y et $A_Z = k_Z A$ est l'aire cisailée suivant Z .

Certains auteurs appellent coefficients de cisaillement les quantités :

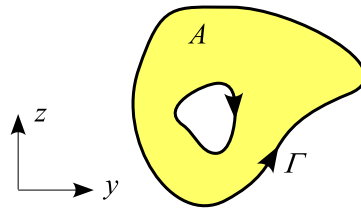
$$\tilde{k}_Y = 1/k_Y \quad , \quad \tilde{k}_Z = 1/k_Z \quad (1.26)$$

1.2 Calculs

1.2.1 Calcul de A , M_y , M_z , I_y , I_z et I_{yz}

Ces quantités sont calculées par **intégration sur le contour extérieur** Γ de la section par utilisation de la **formule de Green** qui permet la transformation d'une intégrale double en intégrale simple de contour :

$$\int_A \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) dA = \int_\Gamma N dy + M dz \quad (1.27)$$



Par exemple, le calcul de I_y s'effectue en posant $N = 0$ et $M = y z^2$ d'où :

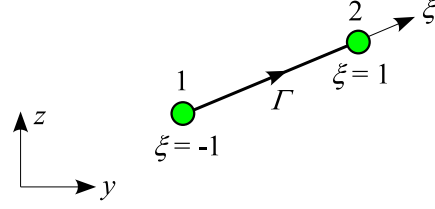
$$I_y = \int_\Gamma y z^2 dz \quad (1.28a)$$

De même :

$$\begin{aligned} A &= \int_\Gamma y dz \quad , \quad M_y = \int_\Gamma y z dz \quad , \quad M_z = - \int_\Gamma y z dy \\ I_z &= - \int_\Gamma z y^2 dy \quad , \quad I_{yz} = \frac{1}{2} \int_\Gamma y^2 z dz \end{aligned} \quad (1.28b)$$

Contribution d'un segment :

Soit l'élément de contour d'origine 1 (y_1, z_1) et d'extrémité 2 (y_2, z_2) :



$$\begin{cases} y = N_1 y_1 + N_2 y_2 \\ z = N_1 z_1 + N_2 z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi = (N'_1 y_1 + N'_2 y_2) d\xi \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi = (N'_1 z_1 + N'_2 z_2) d\xi \end{cases} \quad (1.29a)$$

avec :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}, \quad N'_1 = \frac{-1}{2}, \quad N'_2 = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (1.29b)$$

La contribution du segment 1 → 2 à chacune des quantités recherchées est de la forme :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (1.30)$$

et est calculée numériquement par la **méthode de Gauss** :

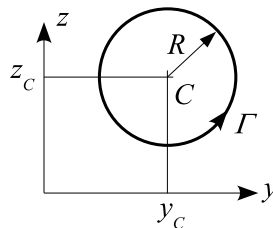
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{npi} f(\xi_i) w_i \quad (1.31)$$

où npi , w_i et ξ_i sont respectivement le nombre de points d'intégration, le poids et l'abscisse du i^e point d'intégration.

Contribution d'un cercle :

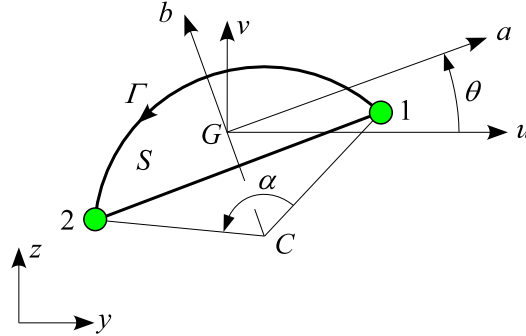
La contribution du cercle de centre $C(y_C, z_C)$, de rayon R et parcouru dans le sens trigonométrique aux quantités recherchées est égale à :

$$\begin{cases} A = \pi R^2 \\ M_y = z_C A, \quad M_z = y_C A \\ I_y = \left(\frac{R^2}{4} + z_C^2\right) A, \quad I_z = \left(\frac{R^2}{4} + y_C^2\right) A, \quad I_{yz} = y_C z_C A \end{cases} \quad (1.32)$$



Contribution d'un arc de cercle :

La contribution de l'arc de cercle d'origine 1 (y_1, z_1) , d'extrémité 2 (y_2, z_2) , de centre C (y_C, z_C) et parcouru dans le sens trigonométrique à l'aire (I_y, \dots) est égale à l'aire (I_y, \dots) du segment circulaire (S) moins la contribution à l'aire (I_y, \dots) du segment $2 \rightarrow 1$.



Soient R le rayon de l'arc, α son angle au centre et L la longueur de sa corde.

Soient G le centre de gravité de (S) , G_a et G_b les axes centraux principaux de (S) . Introduisons les axes G_u et G_v parallèles respectivement aux axes y et z . On a les relations :

$$\begin{aligned} A^S &= \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha) \quad , \quad d = CG = \frac{L^3}{12 A^S} \\ I_a^S &= \frac{R^4}{8} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - d^2 A^S \quad , \quad I_b^S = \frac{R^4}{24} (3\alpha - 4 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Posons :

$$c = \cos \theta = \frac{y_1 - y_2}{L} \quad , \quad s = \sin \theta = \frac{z_1 - z_2}{L} \quad , \quad L^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Les quantités recherchées sont :

$$\begin{cases} M_y^S = z_G A^S \\ M_z^S = y_G A^S \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} I_y^S = I_u^S + z_G^2 A^S \\ I_z^S = I_v^S + y_G^2 A^S \\ I_{yz}^S = I_{uv}^S + y_G z_G A^S \end{cases} \quad (1.34a)$$

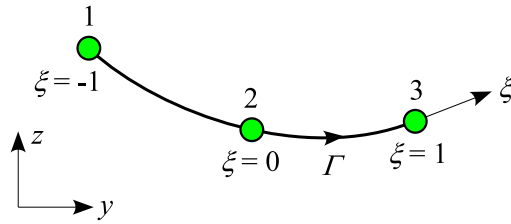
où :

$$\begin{cases} y_G = y_C - s d \\ z_G = z_C + c d \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} I_u^S = I_a^S c^2 + I_b^S s^2 \\ I_v^S = I_a^S s^2 + I_b^S c^2 \\ I_{uv}^S = -I_a^S c s + I_b^S c s \end{cases} \quad (1.34b)$$

Remarque : si l'angle de l'arc est très petit, l'arc est remplacé par un élément de contour quadratique.

Contribution d'un élément de contour quadratique :

Soit l'élément de contour quadratique d'origine 1 (y_1, z_1) , de milieu 2 (y_2, z_2) et d'extrémité 3 (y_3, z_3) :



$$\begin{cases} y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \\ z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi = (N'_1 y_1 + N'_2 y_2 + N'_3 y_3) d\xi \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi = (N'_1 z_1 + N'_2 z_2 + N'_3 z_3) d\xi \end{cases} \quad (1.35a)$$

avec :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}, & N_2 = 1 - \xi^2, & N_3 = \frac{\xi(1+\xi)}{2} \\ N'_1 = \frac{-1+2\xi}{2}, & N'_2 = -2\xi, & N'_3 = \frac{1+2\xi}{2} \end{cases}, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (1.35b)$$

La contribution de l'élément $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ à chacune des quantités recherchées est calculée numériquement par quadrature de Gauss (§ Contribution d'un segment).

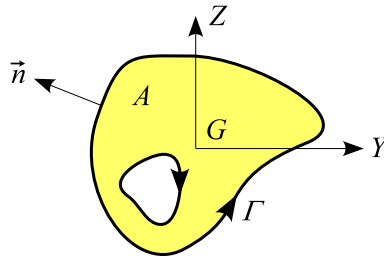
1.2.2 Calcul de β_Y et β_Z

Ces quantités sont calculées par *intégration sur le contour extérieur* Γ :

$$\beta_Y = \int_{\Gamma} -Z Y^3 dY + Y^2 Z^2 dZ, \quad \beta_Z = \int_{\Gamma} -Y^2 Z^2 dY + Y Z^3 dZ \quad (1.36)$$

Le contour est discrétisé en éléments quadratiques. La contribution d'un élément à chacune des quantités recherchées est calculée numériquement par la méthode de Gauss.

1.2.3 Calcul des fonctions de gauchissement



Gauchissement dû à la torsion

(<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/cours/elasticite.pdf>) :

La fonction de gauchissement de torsion $\omega(Y, Z)$ est la solution du problème :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Z^2} = 0 \quad (1.37a)$$

sur le domaine de la section avec la condition aux limites :

$$\frac{\partial \omega}{\partial Y} n_Y + \frac{\partial \omega}{\partial Z} n_Z = Z n_Y - Y n_Z \quad (1.37b)$$

sur le contour extérieur ($\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$) et la condition d'unicité :

$$\int_A \omega \, dA = 0 \quad (1.37c)$$

où n_Y et n_Z sont les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour Γ .

Gauchissement dû à l'effort tranchant :

La fonction de gauchissement d'effort tranchant suivant Y : $g(Y, Z)$ est la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial Z^2} = -\frac{A}{I_Z} Y \quad (1.38a)$$

sur le domaine de la section avec la condition aux limites :

$$\frac{\partial g}{\partial Y} n_Y + \frac{\partial g}{\partial Z} n_Z = 0 \quad (1.38b)$$

sur le contour extérieur ($\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$) et la condition d'unicité :

$$\int_A g \, dA = 0 \quad (1.38c)$$

De même, la fonction de gauchissement d'effort tranchant suivant Z : $h(Y, Z)$ est la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} = -\frac{A}{I_Y} Z \quad (1.39a)$$

sur le domaine de la section avec la condition aux limites :

$$\frac{\partial h}{\partial Y} n_Y + \frac{\partial h}{\partial Z} n_Z = 0 \quad (1.39b)$$

sur le contour extérieur ($\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$) et la condition d'unicité :

$$\int_A h \, dA = 0 \quad (1.39c)$$

Ces problèmes sont résolus par la *méthode des éléments finis* après triangulation de la section par la *méthode de Delaunay*. Les éléments utilisés reposent sur une formulation déplacement.

1.2.4 Calcul des modules plastiques $W_{pl,Y}$ et $W_{pl,Z}$

Ces quantités sont évaluées en utilisant le maillage de la section.

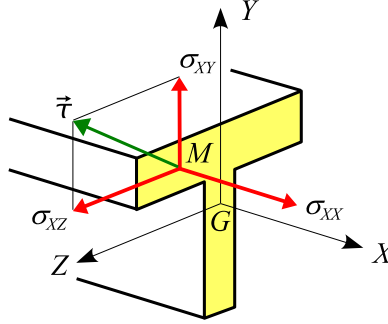
2 Contraintes

G est le centre de gravité de la section. L'axe X est la fibre moyenne de la poutre et $\{G; YZ\}$ est le repère central principal de la section.

Soit

$$[N \quad T_Y \quad T_Z \quad Mt \quad Mf_Y \quad Mf_Z]$$

la **force intérieure** qui s'exerce sur la section.



Au point $M(Y, Z)$, le **tenseur des contraintes** a pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & 0 & 0 \\ \sigma_{XZ} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où la **contrainte normale** est égale à :

$$\sigma_{XX} = \frac{N}{A} + Z \frac{Mf_Y}{I_Y} - Y \frac{Mf_Z}{I_Z} \quad (2.2)$$

et les **contraintes de cisaillement** sont égales à :

$$\begin{cases} \sigma_{XY} = \frac{Mt}{J} \left(\frac{\partial \omega}{\partial Y} - Z \right) + \frac{T_Y}{A} \frac{\partial g}{\partial Y} + \frac{T_Z}{A} \frac{\partial h}{\partial Y} \\ \sigma_{XZ} = \frac{Mt}{J} \left(\frac{\partial \omega}{\partial Z} + Y \right) + \frac{T_Y}{A} \frac{\partial g}{\partial Z} + \frac{T_Z}{A} \frac{\partial h}{\partial Z} \end{cases} \quad (2.3)$$

où ω , g et h sont respectivement les fonctions de gauchissement associées à Mt , T_Y et T_Z (§ Caractéristiques d'une section droite).

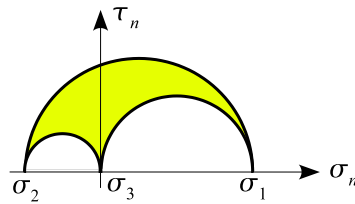
On en déduit :

– les **contraintes principales** :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{XX}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{XX}^2 + 4\tau^2} & \text{avec } \tau^2 = \sigma_{XY}^2 + \sigma_{XZ}^2 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Remarque : on a la relation :

$$\sigma_2 \leq \sigma_3 = 0 \leq \sigma_1 \quad (2.5)$$



- la **contrainte équivalente de Von Mises** :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{XX}^2 + 3\tau^2}$$

- la **contrainte équivalente de Tresca** :

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{XX}^2 + 4\tau^2}$$

Références

- [1] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [2] — , *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*, Hermès, 1990.
- [3] J. COURBON – *Résistance des matériaux, Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1964.
- [4] — , *Résistance des matériaux, Tome 2*, Dunod, 1965.
- [5] G. COWPER – « The shear coefficient in Timoshenko's beam theory », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **33** (1966), p. 335–340.
- [6] Z. FRIEDMAN et J. KOSMATKA – « Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method », *Computers & Structures* **74** (2000), p. 479–494.
- [7] D. GAY – *Matériaux composites*, Hermès, 1997.
- [8] D. GAY et J. GAMBELIN – *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [9] F. GRUTTMAN, R. SAUER et W. WAGNER – « Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **45** (1999), p. 865–889.
- [10] L. HERMANN – « Elastic torsional analysis of irregular shapes », *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* **91** (1965), p. 11–19.
- [11] S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 2. Théorie des poutres*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [12] S. LAROZE et J.-J. BARRAU – *Mécanique des structures, Tome 4. Calcul des structures en matériaux composites*, Eyrolles/Masson, 1987.
- [13] J. MANDEL – « Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité », *Annales des Ponts et Chaussées* **118** (1948), p. 271–290.
- [14] T. NOURI, D. GAY et J. CIEAUX – « Homogénéisation et contraintes de cisaillement dans une poutre composite à phases orthotropes », *Revue des composites et des matériaux avancés* **2** (1992), no. 2, p. 165–181.
- [15] W. D. PILKEY – *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*, Wiley, 2002.
- [16] K. SURANA – « Isoparametric elements for cross-sectional properties and stress analysis of beams », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14** (1979), p. 475–497.
- [17] W. WAGNER et F. GRUTTMAN – « Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190** (2001), p. 3831–3848.