Élasticité

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html

24 mars 2006 – 31 mai 2011

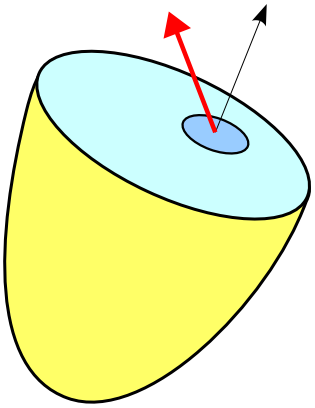


Table des matières

Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).

- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

Le repère $\{O; x, y, z\}$ est un repère orthonormé direct ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes (figure 1).

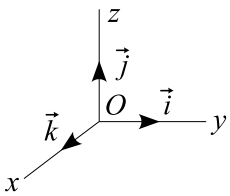


Figure 1 – *Repère orthonormé* $\{O; x, y, z\}$ *et vecteurs unitaires* $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$

1 Contraintes autour d'un point

1.1 Coupure, facette et vecteur contrainte

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface S, en deux parties A et B (figure 2).

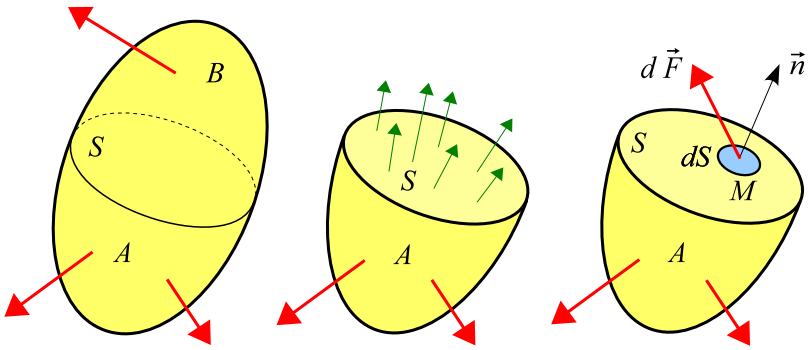


Figure 2 – *Coupure et facette* $\vec{n}$ *en* M

La partie A, par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S. Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et $\vec{n}$ le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A. Nous appellerons cet ensemble **facette** $\vec{n}$ en M.

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette** $\vec{n}$ **en** M, la quantité :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{1.1}$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal (1 Pa = 1 N/m^2) ; dans la pratique, on utilise souvent le mégapascal (1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm^2)

Considérons, en un point M, le cylindre infiniment petit d'axe $\vec{n}$, de hauteur h et de section dS (figure 3).

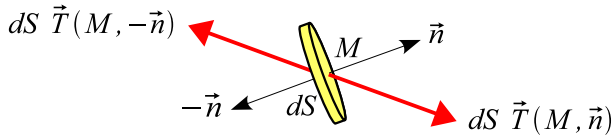


Figure 3 – *Efforts sur les facettes $\vec{n}$ et $-\vec{n}$*

Quand h tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces $dS\ \vec{T}(M,\vec{n})$ et $dS\ \vec{T}(M,-\vec{n})$ d'où :

$$\vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})$$

1.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant $\vec{n}$ et sa projection sur la facette (figure 4) :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n\,\vec{n} + \vec{\tau}_n \tag{1.2}$$

avec

$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{n}) \tag{1.3}$$

σ_n est la **contrainte normale** et $\vec{\tau}_n$ est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**. σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

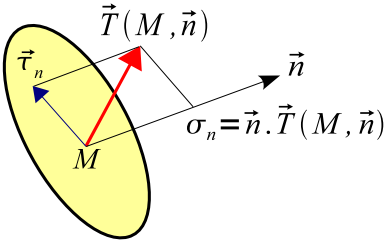


Figure 4 – *Vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M*

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) :

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \tag{1.4}$$

1.3 Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre infiniment petit $MABC$ construit sur les axes x, y et z (figure 5). Soient $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC.

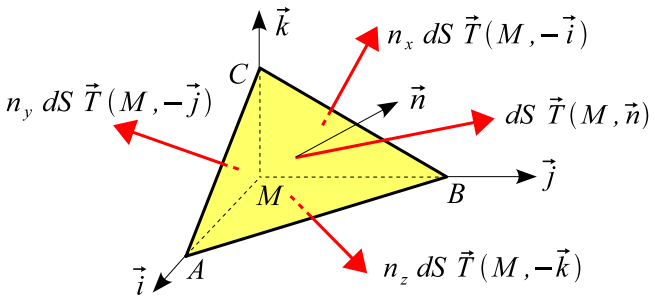


Figure 5 – *Équilibre du tétraèdre (Cauchy)*

On a (§ A.2) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= 2\, dS\, \vec{n} \\
&= 2\, dS\, n_x\, \vec{\imath} + 2\, dS\, n_y\, \vec{\jmath} + 2\, dS\, n_z\, \vec{k} \\
&= \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \\
&= \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} \\
&= \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \vec{0} \\
&= 2\, \text{aire}\,(MBC)\, \vec{\imath} + 2\, \text{aire}\,(MAC)\, \vec{\jmath} + 2\, \text{aire}\,(MAB)\, \vec{k}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

On en déduit par identification :

$$\text{aire}\,(MBC) = n_x\, dS \quad , \quad \text{aire}\,(MAC) = n_y\, dS \quad , \quad \text{aire}\,(MAB) = n_z\, dS \tag{1.6}$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS\, \vec{T}(M, \vec{n}) + n_x\, dS\, \vec{T}(M, -\vec{\imath}) + n_y\, dS\, \vec{T}(M, -\vec{\jmath}) + n_z\, dS\, \vec{T}(M, -\vec{k}) = \vec{0} \tag{1.7}$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x\, \vec{T}(M, \vec{\imath}) + n_y\, \vec{T}(M, \vec{\jmath}) + n_z\, \vec{T}(M, \vec{k}) \tag{1.8}$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \Big[\{T(M, \vec{\imath})\} \quad \{T(M, \vec{\jmath})\} \quad \{T(M, \vec{k})\}\Big]\, \{n\} \tag{1.9}$$

soit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\, \{n\} \qquad (\textbf{formule de Cauchy}) \tag{1.10}$$

où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes**[1] **de Cauchy**[2] en M. Les composantes du tenseur des contraintes (figure 6) dans le repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ sont :

$$\text{composantes sur} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \right. \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{T}(M, \vec{\imath}) & \vec{T}(M, \vec{\jmath}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.11}$$

1. En fait, $[\sigma(M)]$ est la **représentation matricielle** dans le repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ du tenseur des contraintes en M.
2. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

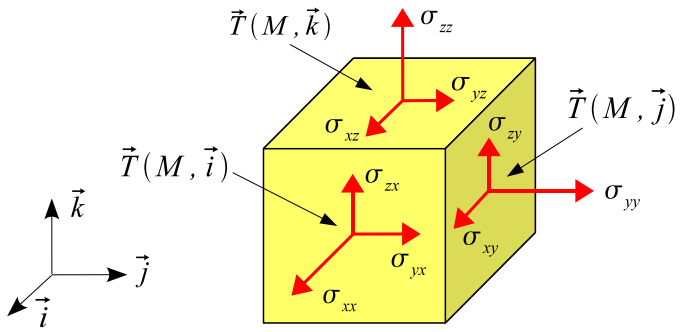


Figure 6 – *Vecteur contrainte sur les facettes $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ en M*

La contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ en M est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M,\vec{n}) = \{n\}^{\mathrm{T}} \left[\sigma(M)\right] \{n\} \tag{1.12}$$

Remarque : sur la facette $\vec{\imath}$ (figure 7), le vecteur contrainte est :

$$\vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_{xx}\,\vec{\imath} + \sigma_{yx}\,\vec{\jmath} + \sigma_{zx}\,\vec{k} \tag{1.13}$$

d'où la contrainte normale et le vecteur cisaillement :

$$\sigma_i = \vec{\imath} \cdot \vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_{xx} \quad , \quad \vec{\tau}_i = \sigma_{yx}\,\vec{\jmath} + \sigma_{zx}\,\vec{k} \tag{1.14}$$

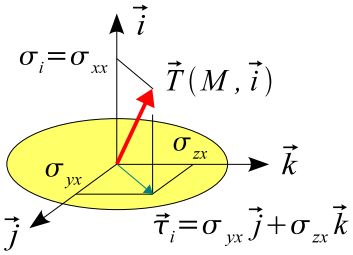


Figure 7 – *Vecteur contrainte sur la facette $\vec{\imath}$ en M*

Changement de repère : considérons le repère orthonormé $\{\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\}$ avec :

$$\begin{bmatrix} \vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\imath}' \cdot \vec{\imath} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{\imath} & \vec{k}' \cdot \vec{\imath} \\ \vec{\imath}' \cdot \vec{\jmath} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{\jmath} & \vec{k}' \cdot \vec{\jmath} \\ \vec{\imath}' \cdot \vec{k} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{k} & \vec{k}' \cdot \vec{k} \end{bmatrix}}_{[R]} \tag{1.15}$$

et

$$\begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}' \end{bmatrix} [R]^{-1} \quad \text{avec} \quad [R]^{-1} = [R]^{\mathrm{T}} \quad , \quad \det[R] = 1 \tag{1.16}$$

Soit $\vec{V}$ un vecteur de composantes :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère } \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\} \tag{1.17}$$

et :

$$\{V'\} = \begin{Bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère } \{\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\} \tag{1.18}$$

On a les relations :

$$\vec{V} = V'_x\,\vec{\imath}' + V'_y\,\vec{\jmath}' + V'_z\,\vec{k}' = \begin{bmatrix}\vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}'\end{bmatrix}\{V'\} = \begin{bmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\end{bmatrix}[R]\,\{V'\} = \begin{bmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\end{bmatrix}\{V\} \tag{1.19}$$

On en déduit :

$$\{V\} = [R]\,\{V'\} \quad , \quad \{V'\} = [R]^{-1}\,\{V\} = [R]^{\mathrm{T}}\,\{V\} \tag{1.20}$$

De la formule de Cauchy (1.10) et des relations :

$$\{T\} = [R]\,\{T'\} \quad , \quad \{n\} = [R]\,\{n'\} \tag{1.21}$$

on déduit :

$$[R]\,\{T'\} = [\sigma]\,[R]\,\{n'\} \tag{1.22}$$

d'où :

$$\{T'\} = [R]^{\mathrm{T}}\,[\sigma]\,[R]\,\{n'\} \tag{1.23}$$

et la formule de transformation pour la matrice des contraintes :

$$[\sigma'] = [R]^{\mathrm{T}}\,[\sigma]\,[R] \tag{1.24}$$

1.4 Équations d'équilibre

Soit $\vec{f}$ la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide.

Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

1.4.1 Équilibre en translation

Écrivons que la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de côtés dx, dy et dz, est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (8)) :

$$\begin{aligned}
&-\sigma_{xx}(x,y,z)\;dy\,dz + \sigma_{xx}(x+dx,y,z)\;dy\,dz\\
&-\sigma_{xy}(x,y,z)\;dx\,dz + \sigma_{xy}(x,y+dy,z)\;dx\,dz\\
&-\sigma_{xz}(x,y,z)\;dx\,dy + \sigma_{xz}(x,y,z+dz)\;dx\,dy + f_x\;dx\,dy\,dz\\
=\;&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\;dV + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\;dV + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\;dV + f_x\;dV = \rho\,dV\,\gamma_x
\end{aligned} \tag{1.25}$$

où $dV = dx\,dy\,dz$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho\,\gamma_x \tag{1.26a}$$

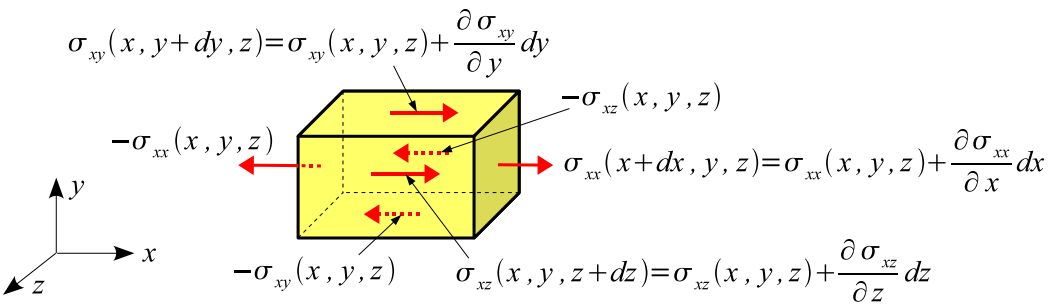


Figure 8 – *Équilibre du parallélépipède suivant x*

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho\,\gamma_y \tag{1.26b}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho\,\gamma_z \tag{1.26c}$$

1.4.2 Équilibre en rotation : réciprocité des contraintes tangentielles

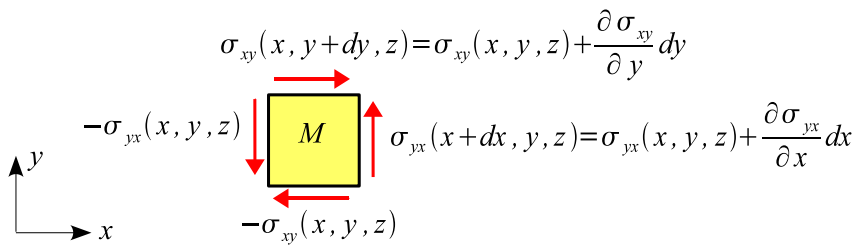


Figure 9 – *Équilibre du parallélépipède en rotation suivant z*

Écrivons que la projection sur Mz de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (9). Il vient, en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieurs à 3 :

$$dx\,(dy\,dz\,\sigma_{yx}) - dy\,(dx\,dz\,\sigma_{xy}) = 0 \tag{1.27}$$

soit (réciprocité des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{1.28}$$

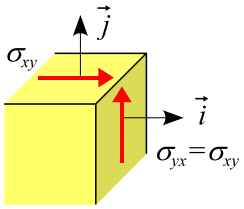


Figure 10 – *Réciprocité des contraintes tangentielles*

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \tag{1.29}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^{\mathrm{T}} \tag{1.30}$$

Remarques :

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont deux facettes en M, on déduit de l'équation (1.30) :

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}') = \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma(M)]\,\{n'\} = \{n'\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma(M)]\,\{n\} = \vec{n}' \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \qquad \forall\, \vec{n}\,,\ \vec{n}' \tag{1.31}$$

- La contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ est :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma]\,\{n\} \\ &= n_x^2\,\sigma_{xx} + n_y^2\,\sigma_{yy} + n_z^2\,\sigma_{zz} + 2\,n_x\,n_y\,\sigma_{xy} + 2\,n_x\,n_z\,\sigma_{xz} + 2\,n_y\,n_z\,\sigma_{yz} \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.5 Directions et contraintes principales

Existe t-il en M une facette $\vec{n}$ telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec $\vec{n}$ (figure 11) ? Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ satisfait la relation :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n\,\vec{n} \tag{1.33}$$

soit :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n\,\{n\} \tag{1.34}$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et $\vec{n}$ est le vecteur propre associé.

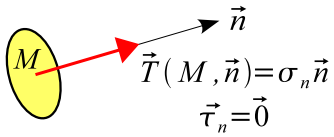


Figure 11 – *Face et contrainte principale en M*

$[\sigma(M)]$ est une matrice symétrique à coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ le vecteur cisaillement soit nul (figure 12).

Les directions $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont les **directions principales**.

Dans le repère principal $\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

où les contraintes normales σ_1, σ_2 et σ_3 sont les **contraintes principales**.

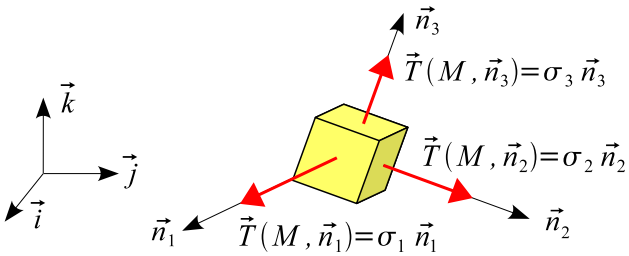


Figure 12 – *Faces et contraintes principales en M*

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique (§ B) :

$$P(\sigma_n) = \det\left([\sigma(M)] - \sigma_n\,[\mathrm{I}]\right) = 0 \quad \text{où } [\mathrm{I}] \text{ est la matrice unité de dimension 3} \tag{1.36}$$

soit

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n + I_3 = 0 \tag{1.37}$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. I_1, I_2 et I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \mathrm{tr}\,[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{1.38a}$$

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\,[\sigma])^2 - \mathrm{tr}\,[\sigma]^2\right) &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3 \end{aligned} \tag{1.38b}$$

$$\begin{aligned} I_3 = \det[\sigma] &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 2\,\sigma_{xy}\,\sigma_{xz}\,\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\,\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\,\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\,\sigma_{xy}^2 \\ &= \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \end{aligned} \tag{1.38c}$$

Dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1\,n_1 \\ \sigma_2\,n_2 \\ \sigma_3\,n_3 \end{Bmatrix} \tag{1.39}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de $\vec{n}$. Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \tag{1.40}$$

Quand $\vec{n}$ varie, l'extrémité du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ se déplace sur l'**ellipsoïde de Lamé** dont les axes sont les directions principales et les demi axes sont σ_1, σ_2 et σ_3.

1.6 Cercles de Mohr des contraintes

1.6.1 Cercle de Mohr des contraintes

En M, prenons comme repère le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Considérons la famille de facettes passant par la direction principale $\vec{n}_3$ (figure 13). Soit $\vec{n}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, une de ces facettes. Sur cette facette, les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1\,\cos\theta \\ \sigma_2\,\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.41}$$

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ est donc situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$.

Soit $\vec{t}$ le vecteur unitaire, situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ et faisant avec $\vec{n}$ un angle égal à $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Projetons le vecteur contrainte sur les axes $\vec{n}$ et $\vec{t}$:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n\,\vec{n} + \tau_n\,\vec{t} \tag{1.42}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma(M)]\,\{n\} = \sigma_1\,\cos^2\theta + \sigma_2\,\sin^2\theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma(M)]\,\{n\} = -\sigma_1\cos\theta\,\sin\theta + \sigma_2\cos\theta\,\sin\theta \end{cases} \tag{1.43}$$

soit

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r\,\cos(-2\,\theta) \\ \tau_n = r\,\sin(-2\,\theta) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{1.44}$$

À chaque facette $\vec{n}$, nous pouvons donc associer un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère $\{\sigma_n, \tau_n\}$ orthonormé. Lorsque l'angle θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r (figure 13).

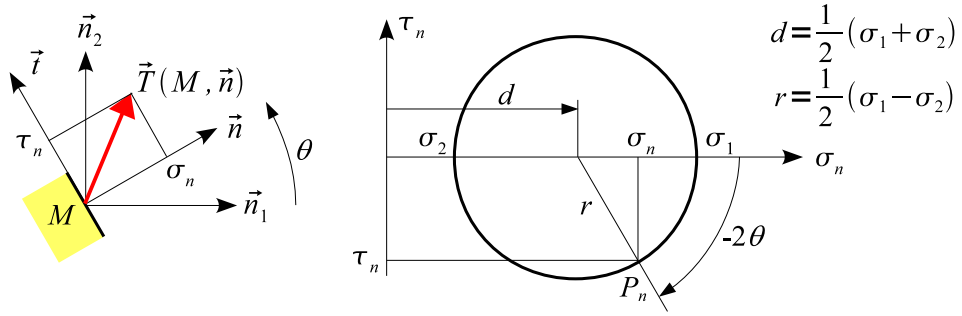


Figure 13 – *Cercle de Mohr des contraintes*

Remarques :

- Les points représentatifs des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont les intersections $(\sigma_1, 0)$ et $(\sigma_2, 0)$ du cercle avec l'axe σ_n.
- Si la facette $\vec{n}$ fait un angle θ avec la facette $\vec{n}_1$, son point représentatif sur le cercle de Mohr [3] fait un angle $-2\,\theta$ avec le point représentatif de la facette $\vec{n}_1$.

1.6.2 Cercles de Mohr des contraintes

Soit $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n\,\vec{n} + \vec{\tau}_n$ le vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ quelconque en M. Les relations :

$$\sigma_n = \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\sigma(M)]\,\{n\} \quad , \quad T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad , \quad \{n\}^{\mathrm{T}}\{n\} = 1 \tag{1.45}$$

où $\tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$ s'écrivent dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$:

$$\begin{cases} \sigma_1\,n_1^2 + \sigma_2\,n_2^2 + \sigma_3\,n_3^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2\,n_1^2 + \sigma_2^2\,n_2^2 + \sigma_3^2\,n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \tag{1.46}$$

Si les trois contraintes principales sont distinctes, on en déduit :

$$\begin{cases} n_1^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)\,(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)\,(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)\,(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \dfrac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)\,(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)\,(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \tag{1.47}$$

Si on suppose $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, les inégalités :

$$n_1^2 \geq 0 \quad , \quad n_2^2 \geq 0 \quad , \quad n_3^2 \geq 0 \tag{1.48}$$

3. Otto Mohr (1835-1918).

s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\,\sigma_n + \sigma_2\,\sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\,\sigma_n + \sigma_3\,\sigma_1 \leq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\,\sigma_n + \sigma_1\,\sigma_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

soit :

$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases} \tag{1.50}$$

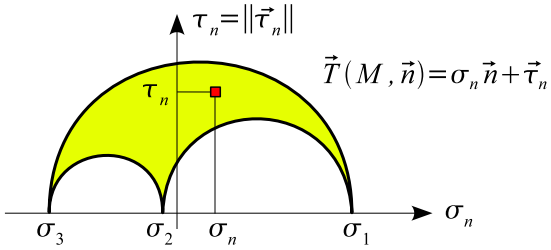


Figure 14 – *Cercles de Mohr des contraintes*

Le point de coordonnées $(\sigma_n, \tau_n = \|\vec{\tau}_n\|)$ se trouve (figure 14) :

- à l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.
- à l'intérieur du demi-cercle de centre $\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.
- à l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Remarque : de cette étude, on déduit la valeur maximale en M de la contrainte normale :

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \tag{1.51}$$

et du cisaillement :

$$2\,\tau_{\max} = \max\,(\,\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\sigma_3\,) - \min\,(\,\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\sigma_3) \tag{1.52}$$

1.7 États de contrainte particuliers

1.7.1 État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple

L'état de contrainte en un point M est uniaxial par rapport à la direction $\vec{\imath}$ (figure 15), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

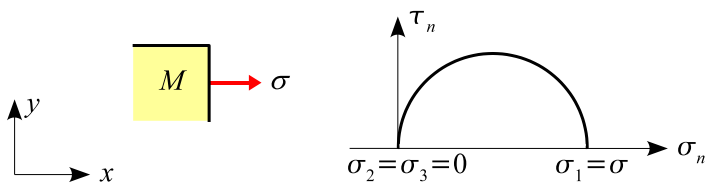


Figure 15 – *État de contrainte uniaxial*

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif.

Le repère $\{M; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ est le repère principal.

1.7.2 État de cisaillement simple

L'état de contrainte en M est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (figure 16), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

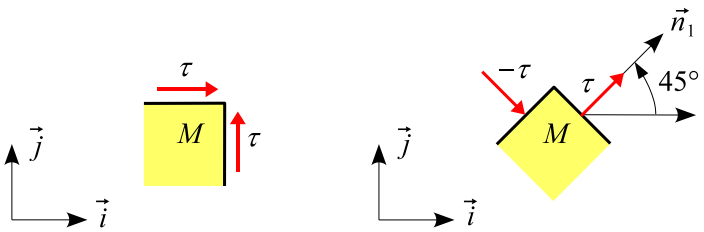


Figure 16 – *État de cisaillement simple : composantes du tenseur des contraintes*

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau \quad , \quad \sigma_3 = 0 \tag{1.55}$$

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.56}$$

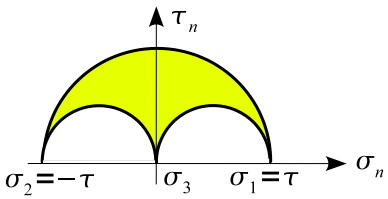


Figure 17 – *État de cisaillement simple : cercles de Mohr*

1.7.3 État de contrainte isotrope

L'état de contrainte en un point M est isotrope (ou sphérique) si :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\,\vec{n} \quad \forall \vec{n} \tag{1.57}$$

Toute facette $\vec{n}$ en M est face principale. Les trois contraintes principales sont égales à σ et le tenseur des contraintes en M a pour expression (quelque soit le repère) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

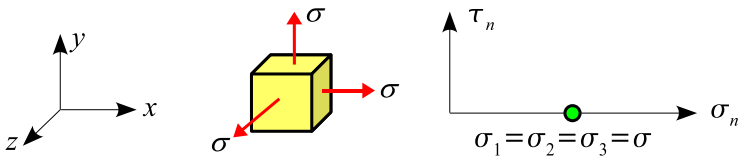


Figure 18 – *État de contrainte isotrope*

Les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent à un point (figure 18).

1.7.4 État de contrainte plan

En un point M, l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (figure 19), si le tenseur des contraintes se réduit à : :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

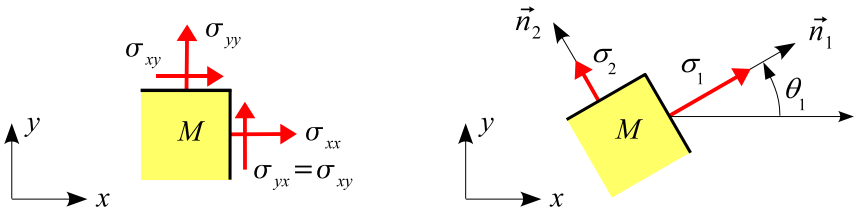


Figure 19 – *État de contrainte plan : composantes du tenseur des contraintes*

Le vecteur contrainte sur la facette $\vec{k}$ est nul :

$$\vec{T}(M,\vec{k}) = \vec{0} \tag{1.60}$$

La direction $\vec{k}$ est donc direction principale et la contrainte principale associée est nulle :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \tag{1.61}$$

Les deux autres directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \tag{1.62}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.63}$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $n_x = n_y = 0$ que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \tag{1.64}$$

d'où l'équation polynomiale en σ_n :

$$\sigma_n^2 - \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{\mathrm{tr}\,[\sigma]=\sigma_1+\sigma_2} \sigma_n + \underbrace{\sigma_{xx}\,\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2}_{\det[\sigma]=\sigma_1\,\sigma_2} = 0 \tag{1.65}$$

les contraintes principales :

$$\left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\,\sigma_{xy}^2} \tag{1.66}$$

et les directions principales associées :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan\theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}} \tag{1.67}$$

où θ_1 est la position angulaire de la direction principale $\vec{n}_1$ par rapport à l'axe x (figure 19).

Les cercles de Mohr des contraintes sont représentés sur la figure 20.

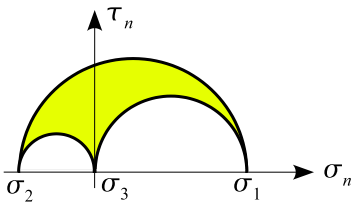


Figure 20 – *État de contrainte plan : cercles de Mohr des contraintes*

Construction du cercle de Mohr de la famille de facettes passant par z : les facettes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux facettes orthogonales de cette famille. Les points représentatifs P_i et P_j de ces facettes dans le plan de Mohr sont donc deux points diamétralement opposés du cercle (figure 22). Les coordonnées de ces points sont (figure 21) :

– facette $\vec{\imath}$: $P_i = \left(\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_{xx}\ ,\ \tau_n = \vec{t}\cdot\vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_{xy}\right)$

– facette $\vec{\jmath}$: $P_j = \left(\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{\jmath}) = \sigma_{yy}\ ,\ \tau_n = \vec{t}\cdot\vec{T}(M,\vec{\jmath}) = -\sigma_{xy}\right)$

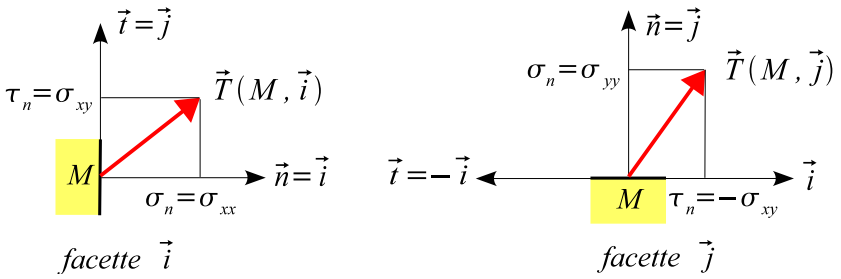


Figure 21 – *État de contrainte plan : facettes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$*

On en déduit la construction du cercle de Mohr (figure 22) : dans le repère orthonormé $\{\sigma_n, \tau_n\}$, on trace le cercle de diamètre $P_i(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})\, P_j(\sigma_{yy}, -\sigma_{xy})$. À l'aide d'une règle, on mesure les contraintes principales σ_1 et σ_2, puis à l'aide d'un rapporteur l'angle $2\,\theta_1$.

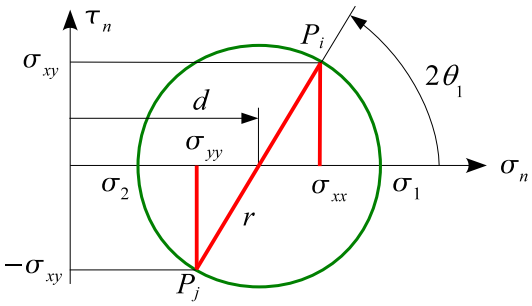


Figure 22 – *Cercle de Mohr*

Changement de repère : dans le repère orthonormé $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$ (figure 23) avec :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.68}$$

le tenseur des contraintes a pour expression (équation 1.24) :

$$[\sigma]_{\{M;\vec{n},\vec{t},\vec{k}\}} = [R]^{\mathrm{T}}\, [\sigma]_{\{M;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}}\, [R] \tag{1.69}$$

où la matrice de transformation $[R]$ est égale à :

$$[R] = \big[\{n\} \quad \{t\} \quad \{0\}\big] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

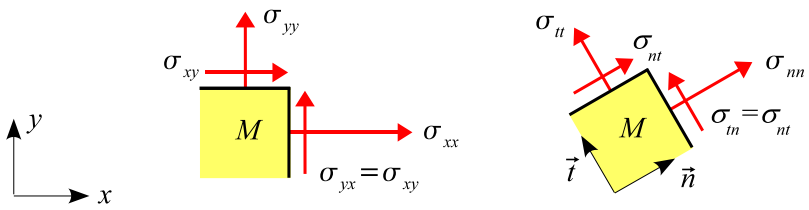


Figure 23 – *Composantes du tenseur des contraintes dans le repère* $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$

On en déduit :

$$[\sigma]_{\{M;\vec{n},\vec{t},\vec{k}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{nt} & 0 \\ \sigma_{nt} & \sigma_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.71}$$

avec :

$$\sigma_{nn} = n_x^2\, \sigma_{xx} + n_y^2\, \sigma_{yy} + 2\, n_x\, n_y\, \sigma_{xy} \quad , \quad \sigma_{tt} = n_y^2\, \sigma_{xx} + n_x^2\, \sigma_{yy} - 2\, n_x\, n_y\, \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{nt} = n_x\, n_y\, (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + (n_x^2 - n_y^2)\, \sigma_{xy}$$

Remarque : on a les relations :

$$\sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^{\mathrm{T}}\, [\sigma(M)]\, \{n\}$$

$$\sigma_{nt} = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^{\mathrm{T}}\, [\sigma(M)]\, \{n\} = \{n\}^{\mathrm{T}}\, [\sigma(M)]\, \{t\}$$

$$\sigma_{tt} = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{t}) = \{t\}^{\mathrm{T}}\, [\sigma(M)]\, \{t\}$$

2 Déformations

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations** (figure 24).

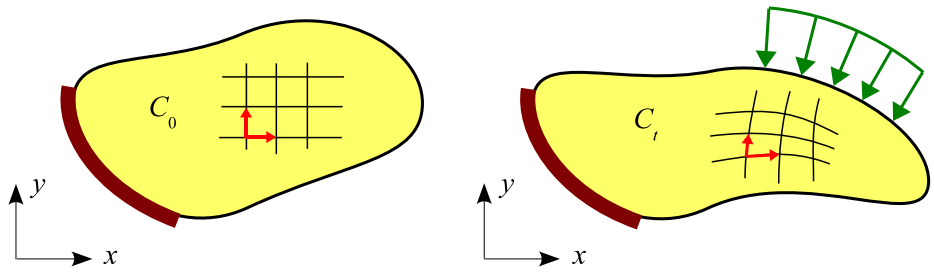


Figure 24 – *Déformations dans un solide*

2.1 Configuration, vecteur déplacement

Le volume occupé par le solide à l'instant t est noté C_t et appelé **configuration courante**. La **configuration initiale** C_0 est la configuration de référence.

Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante (figure 25) :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath} + z_0\,\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{OM} = \vec{x} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \tag{2.1}$$

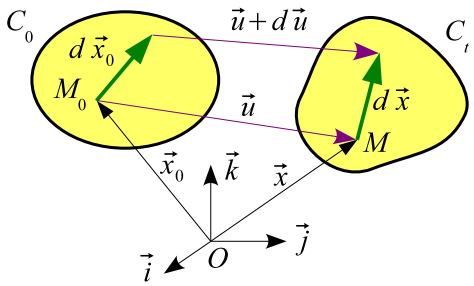


Figure 25 – *Transformation d'un point et d'un vecteur*

On appelle **vecteur déplacement** du point M_0 le vecteur :

$$\vec{u}(M_0;t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + w\,\vec{k} \tag{2.2}$$

où u, v et w sont des fonctions continues et dérivables de x_0, y_0 et z_0, d'où :

$$\vec{x}(M_0;t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(M_0;t) \tag{2.3}$$

Les coordonnées du point M s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0,y_0,z_0;t) \\ y(x_0,y_0,z_0;t) \\ z(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0,y_0,z_0;t) \\ v(x_0,y_0,z_0;t) \\ w(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

x_0, y_0 et z_0 sont les **coordonnées de Lagrange**[4] et la description est dite lagrangienne.

L'équation (2.4) définit la **transformation** qui fait passer le solide de la configuration initiale C_0 à la configuration C_t.

2.2 Transformation des vecteurs : tenseur gradient de la transformation

Le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ en M_0 devient $d\vec{x}$ en M dans la configuration C_t (figures 25 et 26) :

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u} \tag{2.5}$$

soit sous forme matricielle :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = (\,[\mathrm{I}] + [L]\,)\,\{dx_0\} = [F]\,\{dx_0\} \tag{2.6}$$

où :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\partial u}{\partial x_0} & \dfrac{\partial u}{\partial y_0} & \dfrac{\partial u}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_0} & 1+\dfrac{\partial v}{\partial y_0} & \dfrac{\partial v}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_0} & \dfrac{\partial w}{\partial y_0} & 1+\dfrac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad , \quad [L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_0} & \dfrac{\partial u}{\partial y_0} & \dfrac{\partial u}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_0} & \dfrac{\partial v}{\partial y_0} & \dfrac{\partial v}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_0} & \dfrac{\partial w}{\partial y_0} & \dfrac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$[F]$ est le **tenseur gradient de la transformation** (ou **tenseur gradient de la déformation**).

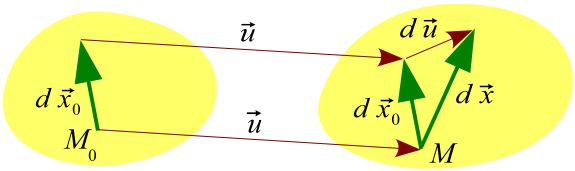


Figure 26 – *Transformation du vecteur $d\vec{x}_0$*

Nous admettrons que la transformation est biunivoque :

$$0 < \det[F] < \infty \quad , \quad \{dx_0\} = [F]^{-1}\,\{dx\} \tag{2.8}$$

Deux points voisins dans la configuration C_0 sont voisins dans la configuration C_t.

La figure (27) montre, dans le cas d'un problème plan, la signification physique des composantes du tenseur gradient de la transformation.

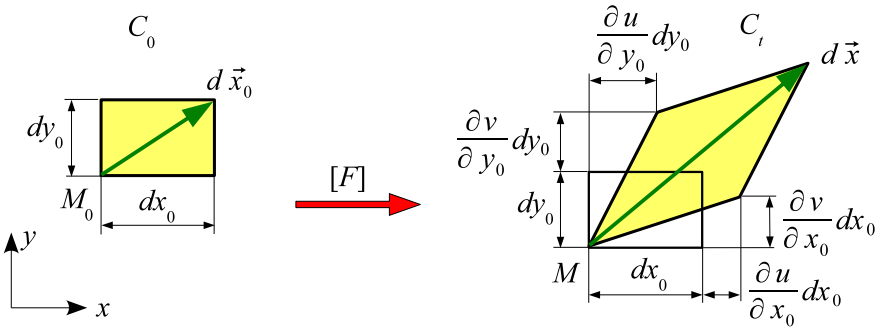


Figure 27 – *Problème plan : transformation d'un vecteur*

4. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

$[L]$ peut être décomposé en sa partie symétrique $[\varepsilon]$ et sa partie antisymétrique $[\Omega]$:

$$[L] = [\Omega] + [\varepsilon] \tag{2.9}$$

avec :

$$[\Omega] = \frac{1}{2}\left([L] - [L]^{\mathrm{T}}\right) \quad , \quad [\Omega] = -[\Omega]^{\mathrm{T}} \tag{2.10}$$

et

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}\left([L] + [L]^{\mathrm{T}}\right) \quad , \quad [\varepsilon] = [\varepsilon]^{\mathrm{T}} \tag{2.11}$$

d'où :

$$[F] = [\,\mathrm{I}\,] + [\varepsilon] + [\Omega] \tag{2.12}$$

2.3 Tenseur des dilatations

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$ (figure 28). Ces vecteurs deviennent $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ dans la configuration C_t :

$$\{dx\} = [F]\,\{dx_0\} \quad , \quad \{dx'\} = [F]\,\{dx'_0\} \tag{2.13}$$

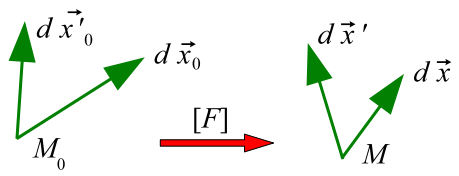


Figure 28 – *Transformation des vecteurs $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$*

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit :

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}' = \{dx\}^{\mathrm{T}}\,\{dx'\} = \{dx_0\}^{\mathrm{T}}\,[F]^{\mathrm{T}}\;[F]\,\{dx'_0\} = \{dx_0\}^{\mathrm{T}}\,[C]\,\{dx'_0\} \tag{2.14}$$

où

$$[C] = [F]^{\mathrm{T}}\,[F] = ([\,\mathrm{I}\,] + [L]^{\mathrm{T}})\,([\,\mathrm{I}\,] + [L]) = [\,\mathrm{I}\,] + [L]^{\mathrm{T}} + [L] + [L]^{\mathrm{T}}\,[L] \tag{2.15}$$

est le **tenseur des dilatations**.

Si $d\vec{x}'_0 = d\vec{x}_0$, il vient :

$$ds^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = \{dx_0\}^{\mathrm{T}}\,[C]\,\{dx_0\} > 0 \quad \forall\; d\vec{x}_0 \neq \vec{0} \tag{2.16}$$

où ds est la longueur du vecteur $d\vec{x}$: la matrice $[C]$ est définie positive.

2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Soit ds_0 la longueur du vecteur $d\vec{x}_0$ et ds celle du vecteur $d\vec{x}$; la différence $ds^2 - ds_0^2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x}\cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0\cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx\}^{\mathrm{T}}\,\{dx\} - \{dx_0\}^{\mathrm{T}}\{dx_0\} = \{dx_0\}^{\mathrm{T}}\,(\,[C] - [\,\mathrm{I}\,]\,)\,\{dx_0\} \\ &= 2\,\{dx_0\}^{\mathrm{T}}\,[E]\,\{dx_0\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

où :

$$[E] = \frac{1}{2}\left([C] - [\,\mathrm{I}\,]\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\,(\,[L]^{\mathrm{T}} + [L]\,)}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,[L]^{\mathrm{T}}\,[L]}_{\text{termes non linéaires}} \tag{2.18}$$

est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange** [5].

Remarque : si $[E] = [\,0\,]$, on a :

$$ds^2 = ds_0^2 \quad \forall\ d\vec{x}_0 \tag{2.19}$$

Le voisinage du point M_0 subit un **mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation)** entre les configurations C_0 et C_t. La condition $[E] = [\,0\,]$ implique pour le tenseur des dilatations :

$$[C] = [F]^{\mathrm{T}}\ [F] = [\,\mathrm{I}\,] \quad \text{d'où} \quad [F]^{\mathrm{T}} = [F]^{-1} \tag{2.20}$$

Dans le repère $\{O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym.} & & E_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

avec (« notation de Voigt ») :

$$\begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z_0} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y_0} + \dfrac{\partial v}{\partial x_0}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z_0} + \dfrac{\partial w}{\partial x_0}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z_0} + \dfrac{\partial w}{\partial y_0}\right) \end{Bmatrix}}_{\text{termes linéaires}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x_0}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z_0}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_0}\dfrac{\partial u}{\partial y_0} + \dfrac{\partial v}{\partial x_0}\dfrac{\partial v}{\partial y_0} + \dfrac{\partial w}{\partial x_0}\dfrac{\partial w}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_0}\dfrac{\partial u}{\partial z_0} + \dfrac{\partial v}{\partial x_0}\dfrac{\partial v}{\partial z_0} + \dfrac{\partial w}{\partial x_0}\dfrac{\partial w}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_0}\dfrac{\partial u}{\partial z_0} + \dfrac{\partial v}{\partial y_0}\dfrac{\partial v}{\partial z_0} + \dfrac{\partial w}{\partial y_0}\dfrac{\partial w}{\partial z_0} \end{Bmatrix}}_{\text{termes non linéaires}} \tag{2.22}$$

Remarques :

- Le tenseur des dilatations s'écrit en fonction du tenseur des déformations :

$$[C] = [\,\mathrm{I}\,] + 2\,[E] \tag{2.23}$$

- Les composantes du tenseur des déformations sont sans dimension.

2.5 Transformation des longueurs et des angles

2.5.1 Dilatation

Considérons en M_0 le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ de longueur ds_0 porté par le vecteur unitaire $\vec{n}_0$:

$$d\vec{x}_0 = ds_0\,\vec{n}_0 \tag{2.24}$$

Ce vecteur devient $d\vec{x}$ de longueur ds dans la configuration C_t (figure 29).

5. George Green (1793-1841).

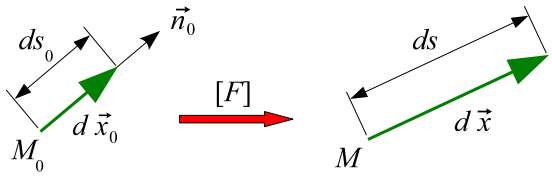


Figure 29 – *Dilatation en M_0 dans la direction $\vec{n}_0$*

On appelle dilatation en M_0 dans la direction $\vec{n}_0$ la quantité :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[C]\,\{n_0\}} = \sqrt{1 + 2\,\{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[E]\,\{n_0\}} \tag{2.25}$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{\imath}$, il vient :

$$\lambda(M_0, \vec{\imath}) = \sqrt{C_{xx}} = \sqrt{1 + 2\,E_{xx}} \tag{2.26}$$

2.5.2 Déformation de Green-Lagrange

On appelle déformation de Green-Lagrange en M_0 dans la direction $\vec{n}_0$ la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2\,ds_0^2} = \{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[E]\,\{n_0\} \tag{2.27}$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{\imath}$, il vient :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{\imath}) = E_{xx} \tag{2.28}$$

2.5.3 Allongement unitaire (déformation de l'ingénieur)

On appelle allongement unitaire en M_0 dans la direction $\vec{n}_0$ la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1 = \sqrt{1 + 2\,\{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[E]\,\{n_0\}} - 1 \tag{2.29}$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{\imath}$, on obtient :

$$\varepsilon(M_0, \vec{\imath}) = \sqrt{C_{xx}} - 1 = \sqrt{1 + 2\,E_{xx}} - 1 \tag{2.30}$$

2.5.4 Transformation des angles : glissement de deux directions orthogonales

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$ portés par les deux directions orthogonales $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$ (figure 30) :

$$d\vec{x}_0 = ds_0\,\vec{n}_0 \quad , \quad d\vec{x}'_0 = ds'_0\,\vec{n}'_0 \quad , \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{n}'_0 = 0 \tag{2.31}$$

Ces vecteurs deviennent $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ de longueur ds et ds' dans la configuration C_t. Soit φ l'angle que font entre eux les vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$.

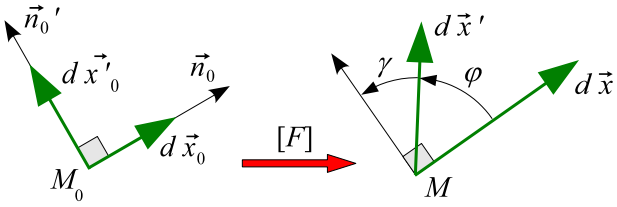


Figure 30 – *Glissement en M_0 dans les directions orthogonales $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$*

On appelle glissement en M_0 dans les directions orthogonales $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$ la quantité :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{2.32}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit (équation 2.14) :

$$d\vec{x} \,.\, d\vec{x}' = ds_0\, ds'_0\, \{n_0\}^{\mathrm{T}}[C]\{n'_0\} = ds\, ds'\, \cos\varphi = ds\, ds'\, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = ds\, ds'\, \sin\gamma \tag{2.33}$$

d'où l'expression du glissement en M_0 des deux directions orthogonales $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$:

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \arcsin \frac{\{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[C]\,\{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0)\ \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} = \arcsin \frac{2\,\{n_0\}^{\mathrm{T}}\,[E]\,\{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0)\ \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \tag{2.34}$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{\imath}$ et $\vec{n}'_0 = \vec{\jmath}$, il vient :

$$\gamma(M_0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \arcsin \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx}\, C_{yy}}} = \arcsin \frac{2\, E_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\, E_{xx})\ (1 + 2\, E_{yy})}} \tag{2.35}$$

2.5.5 Transformation des volumes et des surfaces

Le parallélépipède de volume infiniment petit dV_0 construit en M_0 sur les vecteurs $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$ et $\vec{c}_0$ (le trièdre $\{\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0\}$ est direct) devient le parallélépipède de volume dV construit en M sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ (figure 31).

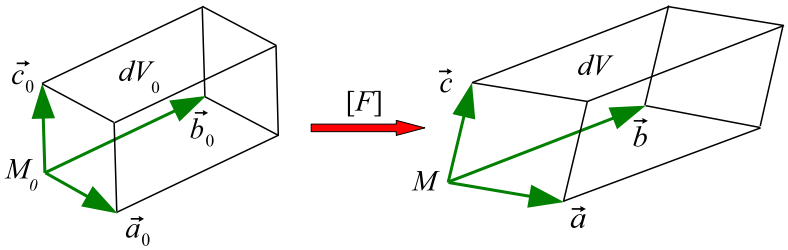


Figure 31 – *Transformation d'un volume infinitésimal*

On a les relations :

$$dV_0 = (\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0) \cdot \vec{c}_0 = \det\left[\{a_0\}\ \{b_0\}\ \{c_0\}\right] \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} dV = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \det\left[\{a\}\ \{b\}\ \{c\}\right] \\ &= \det\left([F]\,[\{a_0\}\ \{b_0\}\ \{c_0\}]\right) = \det[F]\ \det\left[\{a_0\}\ \{b_0\}\ \{c_0\}\right] \end{aligned} \tag{2.37}$$

d'où :

$$dV = \det[F]\ dV_0 \tag{2.38}$$

On appelle **dilatation volumique** en M_0, la quantité :

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0} = \det[F] \tag{2.39}$$

On appelle **déformation volumique** en M_0, la quantité :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1 \tag{2.40}$$

La surface dA_0 construite sur les vecteurs $\vec{a}_0$ et $\vec{b}_0$ devient la surface dA construite sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (figure 32). Des relations :

$$\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0 = \vec{n}_0\ dA_0 \quad , \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{n}\ dA \tag{2.41}$$

où les vecteurs $\vec{n}_0$ et $\vec{n}$ sont unitaires, on déduit :

$$dV_0 = \vec{c}_0 \cdot \vec{n}_0 \, dA_0 = \{c_0\}^{\mathrm{T}} \{n_0\} \, dA_0 \quad , \quad dV = \vec{c} \cdot \vec{n} \, dA = \{c\}^{\mathrm{T}} \{n\} \, dA \tag{2.42}$$

d'où :

$$dV = \{c_0\}^{\mathrm{T}} [F]^{\mathrm{T}} \{n\} \, dA = \det[F] \, dV_0 = \det[F] \, \{c_0\}^{\mathrm{T}} \{n_0\} \, dA_0 \tag{2.43}$$

Cette relation est vérifiée pour tout vecteur $\vec{c}_0$, d'où :

$$[F]^{\mathrm{T}} \{n\} \, dA = \det[F] \, \{n_0\} \, dA_0 \tag{2.44}$$

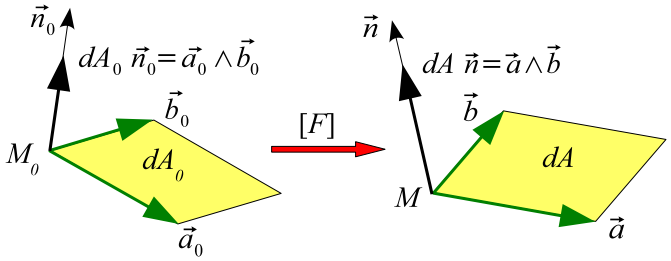


Figure 32 – *Transformation d'une surface infinitésimale*

On en déduit :

$$\{n\} \, dA = \det[F] \, [F]^{-\mathrm{T}} \{n_0\} \, dA_0 \quad , \quad [F]^{-\mathrm{T}} = \left([F]^{-1} \right)^{\mathrm{T}} = \left([F]^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \tag{2.45}$$

2.6 Repère principal, dilatations et déformations principales

La matrice $[C]$ est symétrique, à coefficients réels et définie positive (équation 2.16). Ses valeurs propres (ou valeurs principales) sont positives. Il existe en M_0 un repère orthonormé (ou repère principal) $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$ tel que :

$$[C]\{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \, \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.46}$$

où λ_i est la dilatation principale en M_0 dans la direction principale $\vec{n}_{0i}$.

De l'expression du glissement de deux directions orthogonales (équation 2.34), on déduit que le glissement de deux directions principales est nul (figure 35).

De la relation :

$$\det[C] = \lambda_1^2 \, \lambda_2^2 \, \lambda_3^2 = \det([F]^{\mathrm{T}}[F]) = (\det[F])^2 \tag{2.47}$$

on déduit l'expression de la dilatation volumique (équation 2.39) en fonction des dilatations principales :

$$\lambda_V(M_0) = \det[F] = \lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \tag{2.48}$$

Le tenseur des déformations $[E]$ a les mêmes directions principales que $[C]$. En effet, des équations (2.23) et (2.46) on déduit :

$$([\mathrm{I}] + 2\,[E]) \, \{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \, \{n_{0i}\} \tag{2.49}$$

d'où :

$$[E]\{n_{0i}\} = E_i \, \{n_{0i}\} \quad \text{avec} \quad E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \tag{2.50}$$

Soit $\{dx_0\}$ un vecteur infiniment petit porté par la direction principale $\{n_{0i}\}$:

$$[C]\{dx_0\} = [F]^{\mathrm{T}}\,[F]\{dx_0\} = \lambda_i^2\,\{dx_0\} \tag{2.51}$$

On en déduit :

$$[F]^{\mathrm{T}}\,\{dx\} = \lambda_i^2\,\{dx_0\} \tag{2.52}$$

où $\{dx\} = [F]\{dx_0\}$, puis en multipliant les deux membres de cette équation par $[F]$:

$$[F]\,[F]^{\mathrm{T}}\,\{dx\} = \lambda_i^2\,[F]\,\{dx_0\} = \lambda_i^2\,\{dx\} \tag{2.53}$$

et :

$$[F]\,[F]^{\mathrm{T}}\,\{n_i\} = \lambda_i^2\,\{n_i\} \tag{2.54}$$

où $\{n_i\}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\{dx\}$:

$$\{n_i\} = \frac{1}{\lambda_i}[F]\,\{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.55}$$

Le repère $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$ est le repère principal de la transformation en M_0. Le repère $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ est le repère principal de la transformation en M.

Transformation d'une sphère : l'extrémité du vecteur $d\vec{x}_0$ en M_0 décrit la sphère infiniment petite de rayon dr_0 :

$$\{dx_0\}^{\mathrm{T}}\{dx_0\} = dr_0^2 \tag{2.56}$$

$d\vec{x}_0$ devient $d\vec{x}$ en M. L'extrémité du vecteur $d\vec{x}$ décrit la surface d'équation :

$$\{dx\}^{\mathrm{T}}[F]^{-\mathrm{T}}\,[F]^{-1}\{dx\} = \{dx\}^{\mathrm{T}}([F][F]^{\mathrm{T}})^{-1}\{dx\} = dr_0^2 \tag{2.57}$$

Si on prend comme repère en M, le repère principal du tenseur $[F]\,[F]^{\mathrm{T}}$ (équation 2.54), cette équation s'écrit :

$$\left(\frac{dx}{\lambda_1\,dr_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{\lambda_2\,dr_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\lambda_3\,dr_0}\right)^2 = 1 \tag{2.58}$$

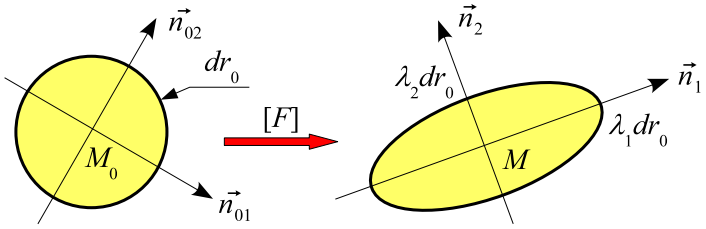


Figure 33 – *Transformation d'un cercle : ellipse des dilatations (problème plan)*

La sphère de rayon dr_0 en M_0 devient en M l'ellipsoïde dont les axes sont les transformés des directions principales de $[C]$ et les demi-axes sont $\lambda_1\,dr_0$, $\lambda_2\,dr_0$ et $\lambda_3\,dr_0$ (figure 33).

2.7 Décomposition polaire

Le déterminant de $[F]$ étant différent de 0, $[F]$ peut être décomposé de façon unique sous les deux formes :

$$[F] = [R][U] = [V][R] \tag{2.59}$$

où :

– $[R]$ est une matrice orthonormale :

$$[R]^{\mathrm{T}}[R] = [R][R]^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \quad , \quad \det[R] = 1 \tag{2.60}$$

et représente un **mouvement de corps rigide** (rotation).

– $[U]$ et $[V]$ sont deux matrices symétriques définies positives et représentent un **mouvement de déformation pure**.

Remarque : les matrices $[U]$ et $[V]$ sont liées par les relations :

$$[V] = [R][U][R]^{\mathrm{T}} \quad , \quad [U] = [R]^{\mathrm{T}}[V][R] \tag{2.61}$$

De la relation $[C] = [F]^{\mathrm{T}}[F]$ on déduit :

$$[C] = [U]^2 \tag{2.62}$$

La matrice des dilatations $[C]$ et la matrice $[U]$ ont les mêmes directions principales $\{n_{0i}\}$. Les valeurs principales de $[U]$ sont les dilatations principales λ_i :

$$[U]\,\{n_{0i}\} = \lambda_i\,\{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.63}$$

On en déduit l'expression de $[U]$ (décomposition spectrale) :

$$[U] = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,\{n_{0i}\}\{n_{0i}\}^{\mathrm{T}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3}\{n_{0i}\}\{n_{0i}\}^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \tag{2.64}$$

La matrice de rotation s'écrit :

$$[R] = [F]\,[U]^{-1} \tag{2.65}$$

De même, de l'équation (2.54) et de la relation :

$$[F][F]^{\mathrm{T}} = [V]^2 \tag{2.66}$$

on déduit :

$$[V]\,\{n_i\} = \lambda_i\,\{n_i\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.67}$$

et

$$[V] = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,\{n_i\}\{n_i\}^{\mathrm{T}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3}\{n_i\}\{n_i\}^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \tag{2.68}$$

Les vecteurs unitaires $\{n_{0i}\}$ et $\{n_i\}$ sont liés par la relation :

$$\{n_i\} = [R]\,\{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.69}$$

La figure (34) montre la transformation par $[F]$, $[U]$, $[V]$ et $[R]$ d'un cercle infiniment petit de centre M_0, de rayon dr_0 et situé dans le plan $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}\}$.

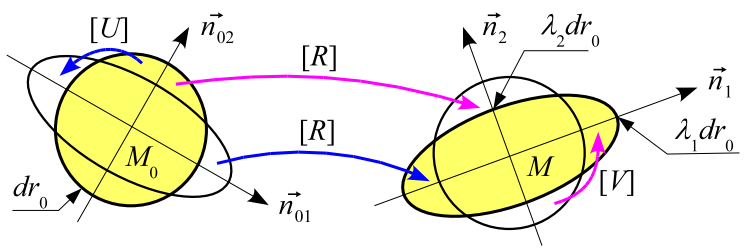


Figure 34 – *Décomposition polaire : transformation d'un cercle (problème plan)*

La figure (35) montre la transformation par $[F]$, $[U]$, $[V]$ et $[R]$ d'un rectangle infiniment petit construit sur les directions principales $\vec{n}_{01}$ et $\vec{n}_{02}$ de la déformation en M_0.

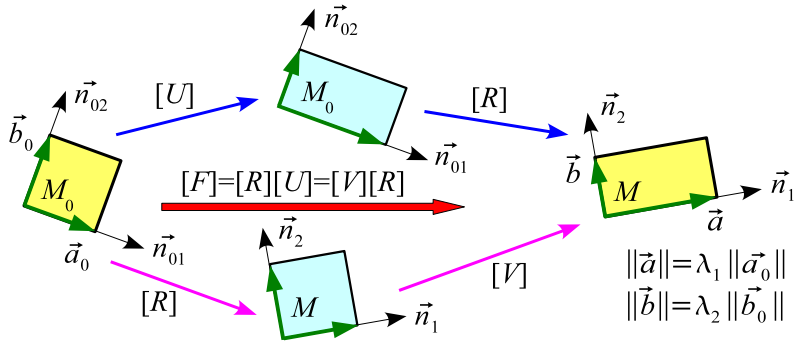


Figure 35 – *Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux portés par les directions principales (problème plan)*

Remarque : si les côtés du rectangle ne sont pas deux directions principales du tenseur $[C]$ en M_0, les arêtes du rectangle subissent une rotation lors de la transformation $[U]$ ou $[V]$ (figure 36).

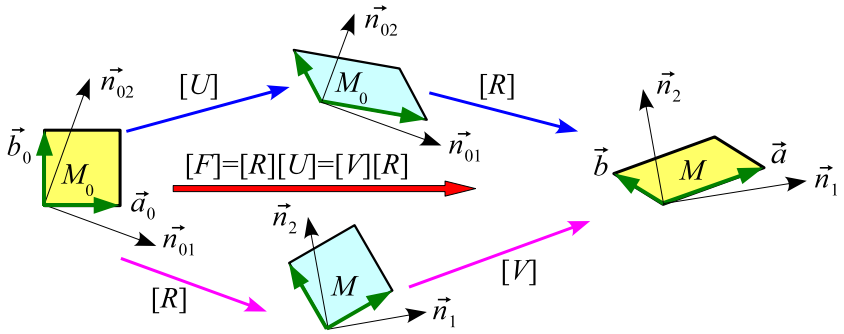


Figure 36 – *Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux (problème plan)*

2.8 Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire

On admettra les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions du solide.

- Les dérivées des déplacements par rapport à x_0, y_0, z_0 sont petites devant l'unité :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right| \ll 1 \quad , \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y_0}\right| \ll 1 \quad \ldots \tag{2.70}$$

  Si f une fonction de x_0, y_0, z_0, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.71}$$

  De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.72}$$

  Rappels : si x et y sont petits devant l'unité ($\mid x \mid \ll 1$, $\mid y \mid \ll 1$), on a les relations :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \quad , \quad (1+x)(1+y) \simeq 1 + x + y \quad , \quad \sin x \simeq x \tag{2.73}$$

2.8.1 Tenseur des déformations linéarisé

Le tenseur des déformations (équation 2.18) se réduit à :

$$[E] \simeq \frac{1}{2}\left([L]^{\mathrm{T}} + [L] \right) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

où :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ 2\,\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad 2\,\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad 2\,\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \tag{2.75}$$

Le tenseur $[\varepsilon]$ est appelé **tenseur des déformations linéarisé**.

Le tenseur des dilatations (équation 2.23) se réduit à :

$$[C] \simeq [\,\mathrm{I}\,] + 2\,[\varepsilon] \tag{2.76}$$

2.8.2 Transformation des longueurs et des angles

L'**allongement unitaire** et la **dilatation** en M et dans la direction $\vec{n}$ (équations 2.29 et 2.25) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M,\vec{n}) &\simeq \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon]\,\{n\} \\ &= \varepsilon_{xx}\,n_x^2 + \varepsilon_{yy}\,n_y^2 + \varepsilon_{zz}\,n_z^2 + \gamma_{xy}\,n_x\,n_y + \gamma_{xz}\,n_x\,n_z + \gamma_{yz}\,n_y\,n_z \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\lambda(M,\vec{n}) \simeq 1 + \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon]\,\{n\} \tag{2.78}$$

Si $\vec{n}$ est l'un des axes $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ ou $\vec{k}$, on obtient :

$$\varepsilon(M,\vec{\imath}) \simeq \varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon(M,\vec{\jmath}) \simeq \varepsilon_{yy} \quad , \quad \varepsilon(M,\vec{k}) \simeq \varepsilon_{zz} \tag{2.79}$$

$$\lambda(M,\vec{\imath}) \simeq 1 + \varepsilon_{xx} \quad , \quad \lambda(M,\vec{\jmath}) \simeq 1 + \varepsilon_{yy} \quad , \quad \lambda(M,\vec{k}) \simeq 1 + \varepsilon_{zz} \tag{2.80}$$

Remarque :

$$\varepsilon_{GL}(M,\vec{n}) \simeq \varepsilon(M,\vec{n}) \tag{2.81}$$

Le **glissement** en M dans les **directions orthogonales** $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ (équation 2.34) s'écrit :

$$\gamma(M,\vec{n},\vec{n}') \simeq 2\,\{n'\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon]\,\{n\} \tag{2.82}$$

Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont l'un des axes $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ ou $\vec{k}$, on obtient :

$$\gamma(M,\vec{\imath},\vec{\jmath}) \simeq \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M,\vec{\imath},\vec{k}) \simeq \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M,\vec{\jmath},\vec{k}) \simeq \gamma_{yz} \tag{2.83}$$

La figure (37) montre la signification physique des composantes du tenseur des déformations dans le cas d'un problème plan.

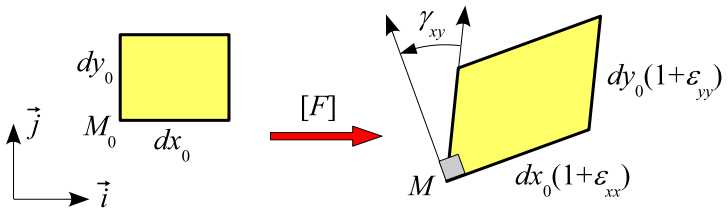


Figure 37 – *Déformation plane : transformation d'un rectangle construit sur les axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$*

Le volume infiniment petit dV_0 en M_0 devient dV en M :

$$dV = \det([F])\, dV_0 \simeq (1 + \mathrm{tr}\,[\varepsilon])\, dV_0 = (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\, dV_0 \tag{2.84}$$

La **déformation volumique** (équation 2.40) en M se réduit à :

$$\varepsilon_V(M) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \simeq \mathrm{tr}\,[\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{u} \tag{2.85}$$

2.8.3 Directions et valeurs principales

En M, dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

où ε_1 , ε_2 et ε_3 sont les déformations principales.

Remarque : les dilatations principales sont :

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_2 \quad , \quad \lambda_3 = 1 + \varepsilon_3 \tag{2.87}$$

2.8.4 Décomposition polaire

Les tenseurs $[R]$, $[U]$ et $[V]$ (§ 2.7) sont voisins de l'unité. Posons :

$$[R] = [\,\mathrm{I}\,] + [r] \qquad [U] = [\,\mathrm{I}\,] + [u] \quad , \quad [V] = [\,\mathrm{I}\,] + [v] \tag{2.88}$$

La condition $[R]^{\mathrm{T}}[R] = [\,\mathrm{I}\,]$ s'écrit :

$$([\,\mathrm{I}\,] + [r])^{\mathrm{T}}\,([\,\mathrm{I}\,] + [r]) \simeq [\,\mathrm{I}\,] + [r] + [r]^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \tag{2.89}$$

d'où

$$[r] = -[r]^{\mathrm{T}} \tag{2.90}$$

La matrice $[r]$ est antisymétrique.

La condition :

$$[C] = [F]^{\mathrm{T}}\,[F] = [U]^2 \quad \text{soit} \quad ([\,\mathrm{I}\,] + [\varepsilon] + [\Omega])^T\ ([\,\mathrm{I}\,] + [\varepsilon] + [\Omega]) = ([\,\mathrm{I}\,] + [u])^2 \tag{2.91}$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[\,\mathrm{I}\,] + 2\,[\varepsilon] \simeq [\,\mathrm{I}\,] + 2\,[u] \quad \text{d'où} \quad [u] \simeq [\varepsilon] \tag{2.92}$$

De même, la relation $[F][F]^{\mathrm{T}} = [V]^2$ implique :

$$[v] \simeq [\varepsilon] \tag{2.93}$$

La relation :

$$[F] = [\,\mathrm{I}\,] + [\Omega] + [\varepsilon] = [R][U] = ([\,\mathrm{I}\,] + [r])\ ([\,\mathrm{I}\,] + [u]) \tag{2.94}$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[F] = [\,\mathrm{I}\,] + [\Omega] + [\varepsilon] \simeq [\,\mathrm{I}\,] + [r] + [u] \tag{2.95}$$

d'où :

$$[r] \simeq [\Omega] \tag{2.96}$$

La matrice de rotation $[R]$ et les matrices de déformation pure $[U]$ et $[V]$ se réduisent à :

$$[R] \simeq [\,\mathrm{I}\,] + [\Omega] \quad , \quad [U] \simeq [V] \simeq [\,\mathrm{I}\,] + [\varepsilon] \tag{2.97}$$

Les composantes de $[\Omega]$ sont :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

où les composantes du vecteur $\vec{\omega}$ sont :

$$2\,\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad 2\,\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad 2\,\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.99}$$

La contribution de $[\Omega]$ à la transformation du vecteur $d\vec{x}_0$ en M_0 s'écrit :

$$\{dx\} = [\Omega]\{dx_0\} \quad \text{soit} \quad d\vec{x} = \vec{\omega} \wedge d\vec{x}_0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} \wedge d\vec{x}_0 \tag{2.100}$$

et représente une rotation infiniment petite du vecteur $d\vec{x}_0$ autour de l'axe $\vec{\omega}$ en M.

2.8.5 Cercle de Mohr des déformations

En M, prenons comme repère, le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Considérons la famille de facettes passant par la direction principale $\vec{n}_3$. Soit $\vec{n}$ $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, une facette appartenant à cette famille et $\vec{t}$ $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ le vecteur unitaire, situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ et faisant avec $\vec{n}$ un angle égal à $\pi/2$. A chaque facette $\vec{n}$, nous pouvons associer les deux quantités ε_n et γ_{nt} définies par les équations (2.77) et (2.82) :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon(M)]\,\{n\} = \varepsilon_1\,\cos^2\theta + \varepsilon_2\,\sin^2\theta \\ \gamma_{nt} = \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = 2\,\{t\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon(M)]\,\{n\} = -2\,\varepsilon_1\,\cos\theta\,\sin\theta + 2\,\varepsilon_2\,\cos\theta\,\sin\theta \end{cases} \tag{2.101}$$

soit

$$\begin{cases} \varepsilon_n = d + r\,\cos(-2\,\theta) \\ \dfrac{1}{2}\,\gamma_{nt} = r\,\sin(-2\,\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad , \quad r = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{2.102}$$

À chaque facette $\vec{n}$, nous pouvons associer un point $(\varepsilon_n\,,\,\gamma_{nt}/2)$ dans un repère orthonormé. Lorsque θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r (figure 38).

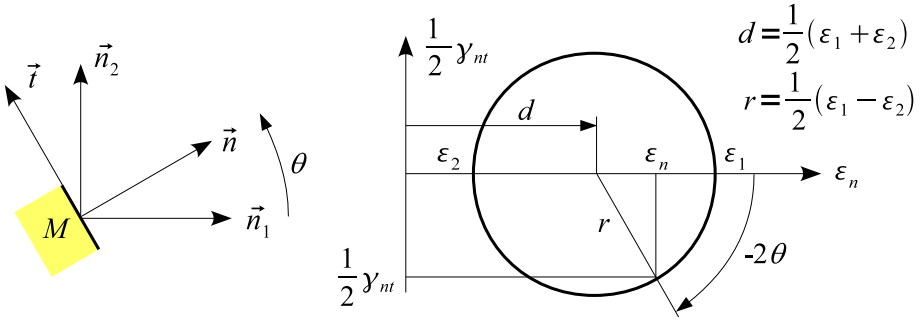


Figure 38 – *Cercle de Mohr des déformations*

3 Loi de comportement ou loi constitutive

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à six composantes (« **notation de Voigt**[6] ») :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

Pour un matériau isotrope (en un point donné du solide, le matériau a les mêmes propriétés dans toutes les directions), les déformations et les contraintes sont liées par la relation (loi de comportement) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\,(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha\,\Delta T \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \dfrac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \dfrac{\sigma_{yz}}{G} \end{cases} \tag{3.2}$$

où

- E, ν et α sont respectivement le **module de Young**[7], le **coefficient de Poisson**[8] et le coefficient de dilatation du matériau.
- $G = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)}$ est le module d'élasticité transversal.
- $\Delta\,T$ est la variation de température.

Remarque : ν est compris entre 0 et 1/2.

Avec ces notations la loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D]\,\{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\} \tag{3.3a}$$

où la matrice $[D]$ des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{3.3b}$$

où :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)} = G \tag{3.3c}$$

6. Woldemar Voigt (1850-1919).
7. Thomas Young (1773-1829).
8. Siméon-Denis Poisson (1781-1840).

sont les **coefficients de Lamé**[9]. Inversement, on a :

$$E = \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{2\,(\lambda + \mu)} \quad , \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \tag{3.4}$$

$\{\sigma_{th}\}$ représente les contraintes d'origine thermique et est égal à :

$$\{\sigma_{th}\} = -\frac{E\,\alpha\,\Delta T}{1 - 2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Caractéristiques de quelques matériaux [24] :

E : module de Young
ν : coefficient de Poisson $\quad (0 \leq \nu \leq 1/2)$
σ_E : limite élastique
α : coefficient de dilatation
ρ : masse volumique

Matériau	E MPa	ν	σ_E MPa	α 10^{-6} K^{-1}	ρ kg/m^3
Acier inox	203 000	0.29	200	15	7850
Aluminium	67 500	0.34	30	24	2700
Cuivre	100 000	0.34	40	16.5	8930
Plexiglas	2 900	0.4	80	85	1800

Remarques :

– Les relations (3.2) et (3.3a) s'écrivent à l'aide du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,[\sigma])\,[\mathrm{I}] + \alpha\,\Delta T\,[\mathrm{I}] \tag{3.6a}$$

$$[\sigma] = \lambda\,(\mathrm{tr}\,[\varepsilon])\,[\mathrm{I}] + 2\,\mu\,[\varepsilon] - \frac{E\alpha\,\Delta T}{1 - 2\,\nu}[\mathrm{I}] \tag{3.6b}$$

– La déformation volumique (équation 2.40) s'écrit en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_V(M) = \frac{(1 - 2\,\nu)}{E}\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + 3\,\alpha\,\Delta T = \frac{(1 - 2\,\nu)}{E}\,\mathrm{tr}\,[\sigma] + 3\,\alpha\,\Delta T \tag{3.7}$$

– La **densité d'énergie de déformation** est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\mathrm{def}}}{dV} &= \frac{1}{2}\,\left(\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} - \{\varepsilon_{th}\}^{\mathrm{T}}\right)\,\{\sigma\} = \frac{1}{2}\,\left(\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} - \{\varepsilon_{th}\}^{\mathrm{T}}\right)\,[D]\,(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \\ &= \frac{1}{2}\,\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\,[D]\,\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\,[D]\,\{\varepsilon_{th}\} + \frac{1}{2}\,\{\varepsilon_{th}\}^{\mathrm{T}}\,[D]\,\{\varepsilon_{th}\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'énergie de déformation s'exprime en joule (J) : 1 J = 1 N.m = 1 kg.m^2.s^{-2}.

9. Gabriel Lamé (1795-1870).

4 Critères de limite élastique

4.1 Problème

Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales en un point M d'un solide. Nous supposerons que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple. Soit σ_E cette limite élastique .

Comment vérifier, dans un état de contrainte complexe, que la limite élastique n'est pas dépassée ? On admet que la limite élastique est atteinte lorsqu'une certaine fonction f des contraintes principales est égale à limite élastique du matériau en traction simple :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_E \tag{4.1}$$

Le domaine élastique en un point du solide est donc défini par la relation :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E \tag{4.2}$$

Nous examinons dans ce chapitre plusieurs critères de limite élastique.

Rappels :

- **état de traction simple** (§ 1.7.1) : $\sigma_1 = \sigma \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$
- **état de cisaillement pur** (§ 1.7.2) : $\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau \quad , \quad \sigma_3 = 0.$

4.2 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

4.2.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E \tag{4.3}$$

La quantité σ_R est appelée **contrainte équivalente de Rankine** [10] **ou de la contrainte normale maximale**.

4.2.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \tag{4.4}$$

pour un état de traction simple et

$$|\tau| \leq \sigma_E \tag{4.5}$$

pour un état de cisaillement pur, ce qui impose $\tau_E = \sigma_E$ où τ_E est la limite élastique au cisaillement pur.

10. William Rankine (1820-1872).

4.2.3 État plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Rankine se réduit à :

$$\sigma_R = \max(\,|\sigma_1|\,,\,|\sigma_2|\,) \tag{4.6}$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (39).

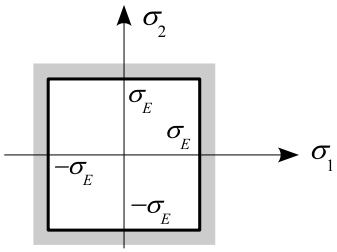


Figure 39 – *Critère de Rankine : domaine élastique*

4.3 Critère de Tresca ou du cisaillement maximal

4.3.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_T = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\,\tau_{\max} = \max\,(\,\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\sigma_3\,) - \min\,(\,\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\sigma_3) \leq \sigma_E \tag{4.7}$$

La quantité σ_T est appelée **contrainte équivalente de Tresca**[11].

4.3.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \tag{4.8}$$

pour un état de traction simple et

$$|2\,\tau| \leq \sigma_E \tag{4.9}$$

pour un état de cisaillement pur, ce qui impose $\tau_E = \sigma_E/2$.

4.3.3 État plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Tresca se réduit à :

$$\sigma_T = \max(\,|\sigma_1 - \sigma_2|\,,\,|\sigma_1|\,,\,|\sigma_2|\,) \tag{4.10}$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (40).

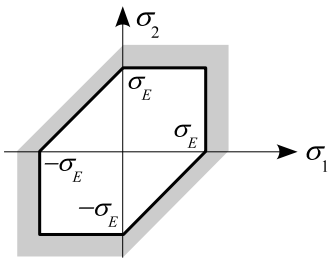


Figure 40 – *Critère de Tresca : domaine élastique*

11. Henri Tresca (1814-1885).

4.4 Critère de Von Mises

4.4.1 Énoncé

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2\right)} \leq \sigma_E \tag{4.11}$$

La quantité σ_{VM} est appelée **contrainte équivalente de Von Mises** [12].

4.4.2 Validité

Le critère s'écrit :

$$|\sigma| \leq \sigma_E \tag{4.12}$$

pour un état de traction simple et

$$\sqrt{3}\,|\tau| \leq \sigma_E \tag{4.13}$$

pour un état de cisaillement pur, ce qui impose $\tau_E = 1/\sqrt{3}\,\sigma_E = 0.58\,\sigma_E$.

4.4.3 État plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

La contrainte équivalente de Von Mises se réduit à :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\,\sigma_2} \tag{4.14}$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure (41).

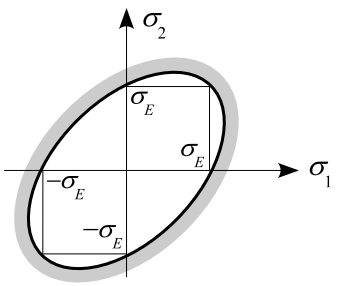


Figure 41 – *Critère de Von Mises : domaine élastique*

5 Problèmes particuliers d'élasticité

5.1 Contraintes planes

Définition : un solide est en état de contraintes planes par rapport au plan $\{O; x, y\}$, s'il existe un repère $\{O; x, y, z\}$, tel qu'en tout point M du solide, le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

12. Richard Von Mises (1883-1953).

où σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} sont indépendants de z.

L'axe z est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\,\alpha\,\Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.2a}$$

avec

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha\,\Delta T \tag{5.2b}$$

d'où la forme du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements $u(x, y)$ et $v(x, y)$ parallèles aux axes x et y.

Les équations d'équilibre (1.26) se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \tag{5.4}$$

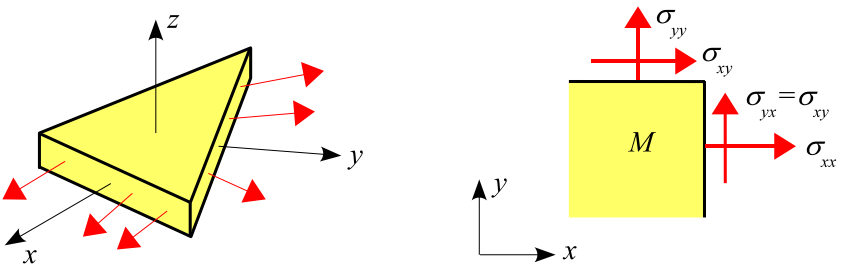


Figure 42 – *Plaque sollicitée dans son plan*

Domaine d'application : l'approximation contraintes planes convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (figure 42). Le plan $\{O; x, y\}$ est alors le plan moyen de la plaque.

5.2 Déformations planes

Définition : un solide est en état de déformations planes par rapport au plan $\{O; x, y\}$ s'il existe un repère $\{O; x, y, z\}$ tel qu'en tout point M du solide, le champ de déplacement soit de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.6a}$$

avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.6b}$$

En tout point du solide, la direction z est donc direction principale. Les déformations et les contraintes sont indépendantes de z.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\,\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\,\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\,\alpha\,\Delta T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.7a}$$

avec

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E\,\alpha\,\Delta T \tag{5.7b}$$

d'où la forme du tenseur des contraintes :

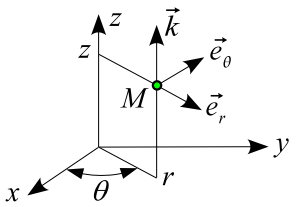
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Domaine d'application : l'état de déformations planes se présente lorsqu'on a affaire à un cylindre d'axe Oz très long satisfaisant aux conditions suivantes :

- les bases du cylindre sont fixes.
- les forces appliquées au solide sont normales à l'axe Oz et indépendantes de z.

5.3 Problème axisymétrique

Le solide considéré est de révolution. Il en va de même du chargement et des conditions aux limites. Soit z l'axe de révolution. Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). La solution est axisymétrique. Chaque point du solide se déplace dans son plan méridien (r, z). De plus le champ de déplacement est indépendant de la coordonnée θ.



Le champ de déplacements se réduit à :

$$\begin{cases} u = u(r,z) & \text{(déplacement radial)} \\ v = 0 & \text{(déplacement orthoradial)} \\ w = w(r,z) & \text{(déplacement axial)} \end{cases} \tag{5.9}$$

On en déduit les déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{u}{r} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u}{r} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{w}{z} \\ \gamma_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \quad , \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad , \quad \gamma_{z\theta} = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

La direction θ est direction principale.

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \frac{E\,\alpha\,\Delta T}{1 - 2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

d'où la forme du tenseur des contraintes :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Les équations d'équilibre (1.26) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \tag{5.13}$$

5.4 Flexion des plaques

5.4.1 Définitions

Une plaque est un corps solide limité par deux faces planes parallèles et par une surface cylindrique perpendiculaire à celles-ci (figure 43).

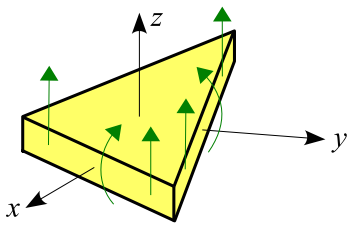


Figure 43 – *Plaque*

L'épaisseur h de la plaque est la distance entre les deux faces.

Le plan équidistant des deux faces est le plan médiant ou surface moyenne.

Soit $\{O; x, y, z\}$ un repère orthonormé tel que le plan $\{O; x, y\}$ soit le plan moyen.

Le plan situé à $z = h/2$ est la peau supérieure de la plaque.

Le plan situé à $z = -h/2$ est la peau inférieure de la plaque.

Une fibre normale est l'ensemble des points du solide situés sur une normale au plan médiant. Elle est caractérisée par la donnée de ses coordonnées (x, y).

Une plaque est dite mince si son épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions.

On adoptera les hypothèses suivantes :

- La plaque est sollicitée par des forces de composantes $(0,\ 0,\ f_z)$ et des couples de composantes $(m_x,\ m_y,\ 0)$.
- La contrainte normale σ_{zz} est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes.
- Les phénomènes de membrane et de flexion sont découplés.

Compte-tenu des conditions de chargement :

- Les phénomènes de membrane sont nuls.
- $\sigma_{zx}(x, y, \pm h/2) = \sigma_{zy}(x, y, \pm h/2) = 0$.

5.4.2 Champ de déplacements : modèle de Reissner/Mindlin

Le modèle de Reissner[13]/Mindlin[14] est basé sur l'**hypothèse cinématique** suivante : au cours de la mise en charge, les fibres normales restent droites d'où l'expression du champ de déplacements (figure 44) :

$$\begin{cases} u(x, y, z; t) = z\ \theta_y(x, y; t) = z\ \beta_x(x, y; t) \\ v(x, y, z; t) = -z\ \theta_x(x, y; t) = z\ \beta_y(x, y; t) \\ w(x, y, z; t) = w(x, y; t) \end{cases} \tag{5.14}$$

où :

w est le déplacement transverse de la surface moyenne.
$\theta_x = -\beta_y$ est la rotation de la fibre normale suivant x.
$\theta_y = \beta_x$ est la rotation de la fibre normale suivant y.

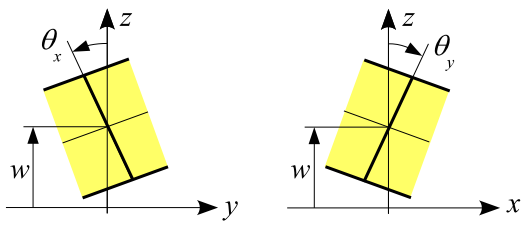


Figure 44 – *Flexion des plaques : champ de déplacements*

Remarque : les déplacements u et v sont linéaires en z.

13. Eric Reissner (1913-1996).
14. Raymond David Mindlin (1906-1987).

5.4.3 Déformations et contraintes

Le champ de déplacements dans le solide est donc défini par la connaissance de w, β_x et β_y en tout point (x, y) du plan moyen.

De l'expression du champ de déplacements, on déduit les déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = z\,\dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = z\,\dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xy} = z\left(\dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x}\right) \quad , \quad \gamma_{xz} = \beta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \beta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{5.15}$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma_f\} = [D_m]\,\{\varepsilon_f\} = z\,[D_m]\,\{\chi\} \tag{5.16a}$$

où :

$$\{\sigma_f\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z\,\{\chi\} \quad , \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5.16b}$$

$$[D_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{5.16c}$$

pour la flexion et

$$\{\sigma_c\} = G\,k_c\,[\,\mathrm{I}\,]\,\{\varepsilon_c\} \tag{5.16d}$$

où :

$$\{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad , \quad [\,\mathrm{I}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{5.16e}$$

pour le cisaillement transverse.

$\{\chi\}$ est le vecteur des courbures.

$\{\varepsilon_c\}$ et $\{\sigma_c\}$ sont constants le long d'une fibre normale : le modèle de Reissner-Mindlin ne respecte pas la condition $\sigma_{zx}(x, y, \pm h/2) = \sigma_{zy}(x, y, \pm h/2) = 0$. k_c est un facteur de correction calculé par identification statique ou dynamique entre une grandeur évaluée avec le modèle de Reissner-Mindlin et cette même grandeur évaluée avec un modèle plus « riche » du point de vue de la théorie de l'élasticité. On adopte souvent :

$$k_c = \frac{5}{6} \tag{5.17}$$

proposé par Reissner [33] par identification statique ou :

$$k_c = \frac{\pi^2}{12} \tag{5.18}$$

proposé par Mindlin [32] par identification dynamique.

Évaluation du coefficient de cisaillement k_c par identification statique : pour satisfaire la condition $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$, la contrainte σ_{xz} doit être au moins quadratique en z (ce qui implique, compte-tenu de la relation cinématique $\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}$, une dépendance en z quadratique pour w et/ou

cubique pour u).

Si on admet la solution :

$$\sigma_{xz}(x,y,z) = \sigma_{xz}(x,y,0)\left(1 - \frac{4\,z^2}{h^2}\right) \tag{5.19}$$

d'où

$$q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x,y,z)\,dz = \frac{2}{3}\,\sigma_{xz}(x,y,0)\,h \tag{5.20}$$

il vient pour l'énergie de déformation par unité de surface moyenne due à la contrainte σ_{xz} :

$$E_1 = \frac{1}{2\,G}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^2(x,y,z)\,dz = \frac{1}{2\,G}\,\frac{8}{15}\,\sigma_{xz}^2(x,y,0)\,h = \frac{1}{2\,G}\,\frac{6\,q_{xz}^2}{5\,h} \tag{5.21}$$

La même quantité évaluée avec le modèle simplifié (5.16) est :

$$E_2 = \frac{1}{2\,G\,k_c}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{q_{xz}^2}{h^2}\,dz = \frac{1}{2\,G}\,\frac{q_{xz}^2}{k_c\,h} \tag{5.22}$$

En écrivant $E_1 = E_2$, il vient :

$$k_c = \frac{5}{6} \tag{5.23}$$

5.4.4 Forces et moments résultants

Considérons un élément de plaque infiniment petit, limité par un cylindre perpendiculaire au plan moyen, de section droite rectangulaire et dont les faces sont parallèles à x ou y (figure 45).

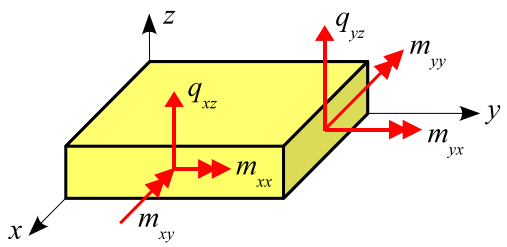


Figure 45 – *Efforts résultants*

Les forces et moments résultants (efforts par unité de longueur) sont définis par :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{xz} \\ q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}\,dz \tag{5.24}$$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}\,dz \tag{5.25}$$

$\{q\}$ et $\{m\}$ s'expriment respectivement en N/m et N.m/m=N.

En portant dans ces expressions les relations de comportement (5.16), il vient :

$$\{m\} = [D_f]\,\{\chi\} \quad \text{avec} \quad [D_f] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_m]\,z^2\,dz = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{5.26a}$$

$$\{q\} = [D_c]\,\{\varepsilon_c\} \quad \text{avec} \quad [D_c] = \int_{-h/2}^{h/2} G\,k_c\,[\mathrm{I}]\,dz = \frac{E\,k_c\,h}{2\,(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.26b}$$

Remarque : on a les relations :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12\,z}{h^3} \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} q_{xz} \\ q_{yz} \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

5.4.5 Énergie de déformation et énergie cinétique

L'énergie de déformation est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon_f\}^{\mathrm{T}} \{\sigma_f\} + \{\varepsilon_c\}^{\mathrm{T}} \{\sigma_c\})\, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^{\mathrm{T}} \{m\} + \{\varepsilon_c\}^{\mathrm{T}} \{q\})\, dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A (\{\chi\}^{\mathrm{T}} [D_f] \{\chi\} + \{\varepsilon_c\}^{\mathrm{T}} [D_c] \{\varepsilon_c\})\, dA \quad \text{avec} \quad dA = dx\, dy \end{aligned} \tag{5.28}$$

L'énergie cinétique est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \int_V \rho\, (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho\, (z^2\, \dot{\beta}_x^2 + z^2\, \dot{\beta}_y^2 + \dot{w}^2)\, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A \rho\, h\, \dot{w}^2\, dA + \frac{1}{2} \int_A \frac{\rho\, h^3}{12}\, (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)\, dA \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.4.6 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre (1.26) se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho\, \ddot{u} \tag{5.30a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho\, \ddot{v} \tag{5.30b}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho\, \ddot{w} \tag{5.30c}$$

Intégrons suivant l'épaisseur l'équation (5.30c) :

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p_z = \rho\, h\, \ddot{w} \quad \text{avec} \quad p_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z\, dz + \sigma_{zz}(x, y, h/2) - \sigma_{zz}(x, y, -h/2) \tag{5.31}$$

Multiplions par z l'équation (5.30a) , puis intégrons suivant l'épaisseur :

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z\, \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\, \rho\, \ddot{\beta}_x\, dz = \frac{1}{12} \rho\, h^3\, \ddot{\beta}_x \tag{5.32}$$

Intégrons par parties l'intégrale du premier membre :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z\, \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial (z\, \sigma_{xz})}{\partial z}\, dz - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz = [z\, \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - q_{xz} \tag{5.33}$$

En utilisant la condition $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$, il vient :

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_{xz} = \frac{1}{12}\, \rho\, h^3\, \ddot{\beta}_x \tag{5.34}$$

Les équations d'équilibre exprimées à l'aide des efforts résutants s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p_z = \rho\, h\, \ddot{w} \\ \dfrac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_{xz} = \dfrac{1}{12}\, \rho\, h^3\, \ddot{\beta}_x \\ \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial m_{yy}}{\partial y} - q_{yz} = \dfrac{1}{12}\, \rho\, h^3\, \ddot{\beta}_y \end{cases} \tag{5.35}$$

5.4.7 Modèle de Kirchhoff

Si la plaque est mince (h est petit par rapport aux dimensions de la plaque), on adopte l'hypothèse de Kirchhoff [15] : au cours de la mise en charge, les fibres normales restent perpendiculaires à la déformée de la surface moyenne d'où les relations cinématiques :

$$\beta_x = \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \beta_y = -\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{5.36}$$

Le champ de déplacements se réduit à :

$$\begin{cases} u(x,y,z;t) = -z\, \dfrac{\partial w(x,y;t)}{\partial x} \\ v(x,y,z;t) = -z\, \dfrac{\partial w(x,y;t)}{\partial y} \\ w(x,y,z;t) = w(x,y;t) \end{cases} \tag{5.37}$$

d'où les déformations :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad , \quad \{\chi\} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

et les contraintes :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{5.39}$$

Le cisaillement transversal est négligé.

5.5 Torsion d'une poutre cylindrique : théorie de Saint-Venant

Saint-Venant [16] a résolu le problème de la torsion des poutres cylindriques en adoptant le champ de déplacements (figure 46) :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \omega(y,z)\, \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta_x}{dx} = Cte \\ v(x,y,z) &= -z\, \theta_x \\ w(x,y,z) &= y\, \theta_x \end{aligned} \tag{5.40}$$

où :

- θ_x est la rotation supposée petite de la section autour de l'axe $\vec{x}$.

15. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).
16. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886).

– $\omega(y, z)$ est la fonction de gauchissement.

Le champ de déplacements est la combinaison d'une rotation de la section droite autour du point C appelé **centre de torsion** (ou **centre de cisaillement**) et du **gauchissement de la section**.

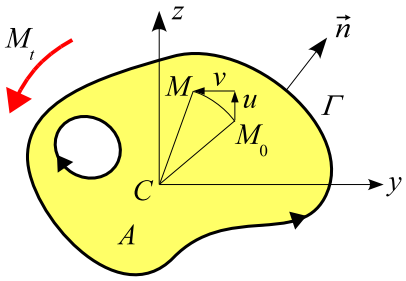


Figure 46 – *Torsion d'une poutre cylindrique : champ de déplacements*

On en déduit les déformations :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)\frac{d\theta_x}{dx} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)\frac{d\theta_x}{dx} \tag{5.41}$$

puis les contraintes :

$$\sigma_{xy} = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)\frac{d\theta_x}{dx} \quad , \quad \sigma_{xz} = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)\frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{5.42}$$

Les composantes du tenseur des contraintes se réduisent donc à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

La surface du cylindre est libre de toute contrainte. Si M est un point du contour et $\vec{n}$ de composantes $(0, n_y, n_z)$ la normale extérieure, on a :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \{0\} \tag{5.44}$$

soit

$$\sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z = 0 \quad \forall M \in \Gamma \tag{5.45}$$

Le moment de torsion est égal à :

$$Mt = \int_A (y\,\sigma_{xz} - z\,\sigma_{xy})\, dA = G\,J\,\frac{d\theta_x}{dx} \tag{5.46}$$

où :

$$J = \int_A \left(y\,\frac{\partial \omega}{\partial z} - z\,\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dA + I_p \quad \text{avec} \quad I_p = \int_A (y^2 + z^2)\, dA = I_y + I_z \tag{5.47}$$

est la **constante de torsion de Saint-Venant**.

Les contraintes sont égales à :

$$\sigma_{xy} = \frac{Mt}{J}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right) \quad , \quad \sigma_{xz} = \frac{Mt}{J}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right) \tag{5.48}$$

Remarque : si la section est circulaire, la fonction de gauchissement est nulle et la constante de torsion se réduit à :

$$J = I_p \tag{5.49}$$

La fonction de gauchissement $\omega(y, z)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en tout point intérieur} \tag{5.50}$$

avec la condition :

$$\sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z = \frac{\partial \omega}{\partial y}\, n_y + \frac{\partial \omega}{\partial z}\, n_z - z\, n_y + y\, n_z = 0 \quad \text{en tout point du contour} \tag{5.51}$$

5.6 Contraintes dans une poutre

Considérons une section droite de centre de gravité G. Soient y et z les axes centraux principaux de la section. L'axe x est l'axe neutre de la poutre.

Soit $\begin{bmatrix} N & T_y & T_z & Mt & Mf_y & Mf_z \end{bmatrix}$ les efforts intérieurs qui s'exercent sur la section.

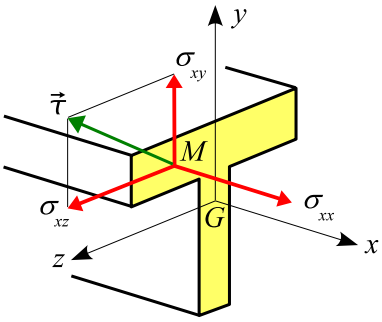


Figure 47 – *Contraintes dans une section droite*

Au point $M(y, z)$, le tenseur des contraintes a pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

La contrainte normale σ_{xx} est égale à :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + z\,\frac{Mf_y}{I_y} - y\,\frac{Mf_z}{I_z} \tag{5.53}$$

où A est l'aire de la section droite et I_y et I_z ($I_{yz} = 0$) ses moments quadratiques.

Les contraintes tangentielles σ_{xy} et σ_{xz} sont dues au moment de torsion Mt et aux efforts tranchants T_y et T_z.

Les contraintes principales sont les solutions de l'équation :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & -\sigma_n & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} = 0 \tag{5.54}$$

soit :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_n) \det \begin{bmatrix} -\sigma_n & 0 \\ 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} - \sigma_{xy} \det \begin{bmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} + \sigma_{xz} \det \begin{bmatrix} \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -\sigma_n & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.55}$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$P(\sigma_n) = \sigma_n^3 - \sigma_{xx}\,\sigma_n^2 - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2)\,\sigma_n = 0 \tag{5.56}$$

On en déduit :

– les contraintes principales :

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\,\tau^2} \quad \text{avec} \quad \tau^2 = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 \tag{5.57}$$

Remarque : on a la relation :

$$\sigma_2 \leq \sigma_3 = 0 \leq \sigma_1 \tag{5.58}$$

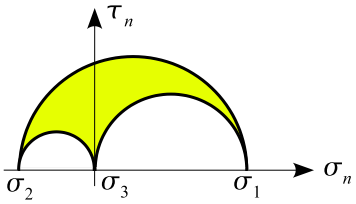


Figure 48 – *Cercles de Mohr des contraintes*

– la contrainte équivalente de Rankine :

$$\sigma_R = \frac{1}{2}\left(|\sigma_{xx}| + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\,\tau^2}\right) \tag{5.59}$$

– la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\,\tau^2} \tag{5.60}$$

– la contrainte équivalente de Tresca :

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\,\tau^2} \tag{5.61}$$

6 Dépouillement des rosettes d'extensométrie

6.1 Principe

Une rosette d'extensométrie est un ensemble de trois jauges de déformation collées en un point M d'un solide et faisant entre elles un angle égal à φ (figure 49). Dans la pratique, l'angle φ est égal à 45 ou 120 degrés. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les vecteurs unitaires portés par les jauges.

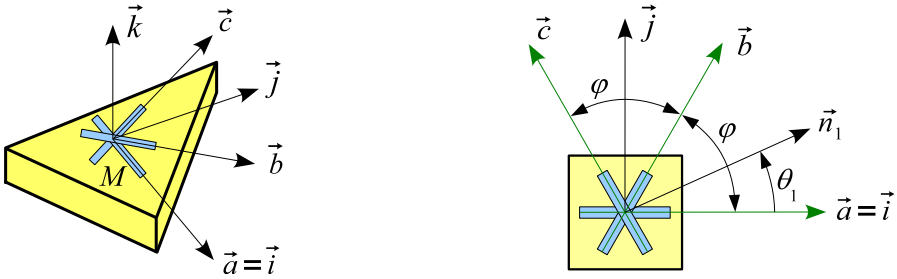


Figure 49 – *Rosette d'extensométrie*

Soient $\vec{k}$ le vecteur unitaire normal en M à la surface, dirigé vers l'extérieur du solide et $\{M;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ le repère orthonormé tel que $\vec{\imath}=\vec{a}$.

La direction $\vec{k}$ est direction principale et, en l'absence de pression extérieure, la contrainte principale correspondante est nulle : en M l'état de contrainte est plan. Le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations ont pour expression dans le repère $\{M;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$:

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

avec les relations de comportement (en l'absence de gradient thermique) :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{xx}+\nu\,\varepsilon_{yy}) \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_{yy}+\nu\,\varepsilon_{xx}) \quad , \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\,\gamma_{xy} \tag{6.2a}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \tag{6.2b}$$

où E et ν sont les caractéristiques élastiques du matériau.

La mesure de l'allongement unitaire dans les trois directions $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\varepsilon_a = \varepsilon(M,\vec{a}) \quad , \quad \varepsilon_b = \varepsilon(M,\vec{b}) \quad , \quad \varepsilon_c = \varepsilon(M,\vec{c}) \tag{6.3}$$

donne trois équations qui, ajoutées aux quatre relations (6.2), permet la détermination de l'état de déformation (4 inconnues) et de l'état de contrainte (3 inconnues) en M.

Les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont :

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} \cos 2\,\varphi \\ \sin 2\,\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

L'allongement unitaire en M dans les trois directions $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est égal à (équation 2.77) :

$$\varepsilon(M,\vec{n}=\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \{n\}^{\mathrm{T}}\,[\varepsilon(M)]\,\{n\} = n_x^2\,\varepsilon_{xx} + n_y^2\,\varepsilon_{yy} + n_x\,n_y\,\gamma_{xy} \tag{6.5}$$

d'où :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{xx}\,\cos^2(\varphi) + \varepsilon_{yy}\,\sin^2(\varphi) + \gamma_{xy}\,\cos(\varphi)\,\sin(\varphi) \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{xx}\,\cos^2(2\,\varphi) + \varepsilon_{yy}\,\sin^2(2\,\varphi) + \gamma_{xy}\,\cos(2\,\varphi)\,\sin(2\,\varphi) \end{cases} \tag{6.6}$$

On en déduit :

– les composantes ε_{xx}, ε_{yy} et γ_{xy} du tenseur des déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\varepsilon_a\,(2\,\cos^2(\varphi) - 1) + 2\,\varepsilon_b\,(1 - 2\,\cos^2(\varphi)) + \varepsilon_c}{2\,\sin^2(\varphi)} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\varepsilon_a\,(1 - 4\,\cos^2(\varphi)) + 4\,\cos^2(\varphi)\,\varepsilon_b - \varepsilon_c}{2\,\cos(\varphi)\,\sin(\varphi)} \end{cases} \tag{6.7}$$

– les composantes du tenseur des contraintes et la déformation ε_{zz} (équation 6.2)

– les contraintes principales :

$$\left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\,\sigma_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_{zz} = 0 \tag{6.8}$$

– les déformations principales :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,(\sigma_1 - \nu\,\sigma_2) \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\,(\sigma_2 - \nu\,\sigma_1) \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\,(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6.9}$$

– la position angulaire θ_1 de la direction principale $\vec{n}_1$ par rapport à l'axe $\vec{\imath} = \vec{a}$:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = 2\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{xx}}{\gamma_{xy}} \tag{6.10}$$

6.2 Rosette à 45 degrés

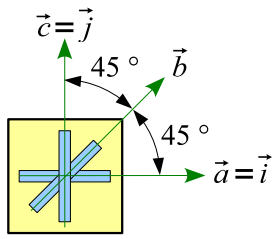


Figure 50 – *Rosette à 45 degrés*

L'équation (6.6) se réduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_{xx} + \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_{yy} + \dfrac{1}{2}\,\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{yy} \end{cases} \tag{6.11}$$

d'où

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c \quad , \quad \gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c \tag{6.12}$$

et

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1 - \nu}\,(\varepsilon_a + \varepsilon_c) \tag{6.13}$$

6.3 Rosette à 120 degrés

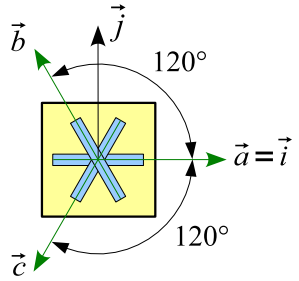


Figure 51 – *Rosette à 120 degrés*

L'équation (6.6) se réduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b = \dfrac{1}{4}\,\varepsilon_{xx} + \dfrac{3}{4}\,\varepsilon_{yy} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = \dfrac{1}{4}\,\varepsilon_{xx} + \dfrac{3}{4}\,\varepsilon_{yy} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\gamma_{xy} \end{cases} \tag{6.14}$$

d'où

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3}\,(2\,\varepsilon_b + 2\,\varepsilon_c - \varepsilon_a) \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(\varepsilon_c - \varepsilon_b) \tag{6.15}$$

et

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{2}{3}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c) \tag{6.16}$$

6.4 Remarque : utilisation du cercle de Mohr des déformations

Les facettes $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ appartiennent à la famille de facettes passant par la direction principale $\vec{n}_3 = \vec{k}$. En utilisant la représentation de Mohr des déformations (§ 2.8.5), on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = d + r\,\cos(2\,\theta_1) \\ \varepsilon_b = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - \varphi)) \\ \varepsilon_c = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - 2\,\varphi)) \end{cases} \tag{6.17}$$

où :

$$d = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2 \quad , \quad r = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{6.18}$$

Ces trois équations permettent le calcul de d, r et θ_1, puis $\varepsilon_1 = d + r$ et $\varepsilon_2 = d - r$:

Rosette à 45 degrés : les équations (6.17) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = d + r\,\cos(2\,\theta_1) \\ \varepsilon_b = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - \pi/4)) = d + r\,\sin(2\,\theta_1) \\ \varepsilon_c = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - \pi/2)) = d - r\,\cos(2\,\theta_1) \end{cases} \tag{6.19}$$

d'où :

$$d = (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2 \quad , \quad r\,\cos(2\,\theta_1) = \varepsilon_a - d \quad , \quad r\,\sin(2\,\theta_1) = \varepsilon_b - d \tag{6.20}$$

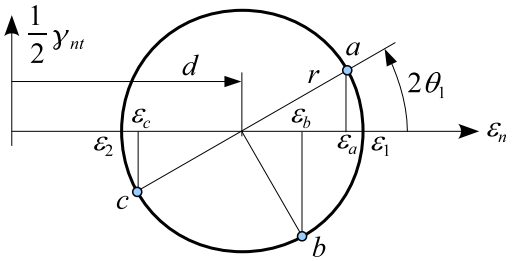


Figure 52 – *Cercle de Mohr : rosette à 45 degrés*

Rosette à 120 degrés : les équations (6.17) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = d + r\,\cos(2\,\theta_1) \\ \varepsilon_b = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - 2\,\pi/3)) = d - r\,\cos(2\,\theta_1)/2 - \sqrt{3}\,r\,\sin(2\,\theta_1)/2 \\ \varepsilon_c = d + r\,\cos(2\,(\theta_1 - 4\,\pi/3)) = d - r\,\cos(2\,\theta_1)/2 + \sqrt{3}\,r\,\sin(2\,\theta_1)/2 \end{cases} \tag{6.21}$$

d'où :

$$d = (\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)/3 \tag{6.22a}$$

$$r\,\cos(2\,\theta_1) = \varepsilon_a - d \quad , \quad r\,\sin(2\,\theta_1) = (\varepsilon_c - \varepsilon_b)/\sqrt{3} \tag{6.22b}$$

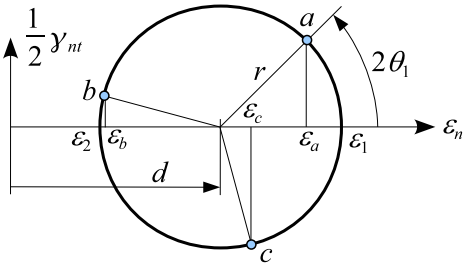


Figure 53 – *Cercle de Mohr : rosette à 120 degrés*

A Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

A.1 Produit scalaire

On appelle produit scalaire des deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (figure 54) le nombre réel noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\,\cos\widehat{\vec{U}\,\vec{V}} \tag{A.1}$$

Si $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.

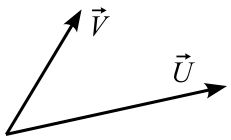


Figure 54 – *Produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$*

Si le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

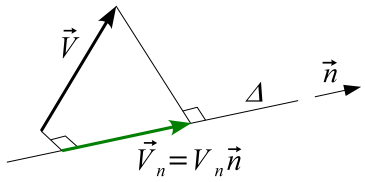


Figure 55 – *Projection d'un vecteur sur un axe*

Soient $\vec{V}$ un vecteur quelconque et $\vec{n}$ un vecteur unitaire (figure 55). La projection de $\vec{V}$ sur la droite Δ portée par $\vec{n}$ est le vecteur :

$$\vec{V}_n = V_n \, \vec{n} \quad \text{avec } V_n = \vec{n} \cdot \vec{V} \tag{A.2}$$

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs et λ un nombre réel. On a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \tag{A.3}$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W} \tag{A.4}$$

$$\vec{U} \cdot (\lambda \, \vec{V}) = \lambda \, (\vec{U} \cdot \vec{V}) \tag{A.5}$$

Si $\{U\}^{\mathrm{T}} = \{U_x, U_y, U_z\}^{\mathrm{T}}$ et $\{V\}^{\mathrm{T}} = \{V_x, V_y, V_z\}^{\mathrm{T}}$ sont respectivement les composantes des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans le repère orthonormé $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x \, V_x + U_y \, V_y + U_z \, V_z = \{U\}^{\mathrm{T}} \, \{V\} = \{V\}^{\mathrm{T}} \, \{U\} \tag{A.6}$$

Remarque : la norme du vecteur $\vec{U}$ est égale à :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} = \sqrt{\{U\}^{\mathrm{T}} \, \{U\}} \geq 0 \tag{A.7}$$

A.2 Produit vectoriel

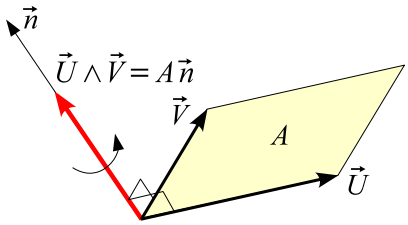


Figure 56 – *Produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$*

On appelle produit vectoriel des deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (figure 56) le vecteur noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ défini par :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = A \, \vec{n} \tag{A.8}$$

tel que :

- $\vec{n}$ est unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$) et perpendiculaire aux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- $\vec{n}$ forme avec les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ un trièdre direct.
- A est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Remarque :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\| \, |\sin \widehat{\vec{U}\,\vec{V}}| \tag{A.9}$$

Si $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$.

Si le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul, ces deux vecteurs sont colinéaires.

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs et λ un nombre réel. On a :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U} \tag{A.10}$$

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W} \tag{A.11}$$

$$\vec{U} \wedge (\lambda \, \vec{V}) = \lambda \, (\vec{U} \wedge \vec{V}) \tag{A.12}$$

On en déduit :

$$\vec{U} \wedge (\lambda \, \vec{U}) = \vec{0} \tag{A.13}$$

Si $\{U\}^{\mathrm{T}} = \{U_x, U_y, U_z\}^{\mathrm{T}}$ et $\{V\}^{\mathrm{T}} = \{V_x, V_y, V_z\}^{\mathrm{T}}$ sont respectivement les composantes des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans le repère orthonormé $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on a :

$$\{U\} \wedge \{V\} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_y \, V_z - U_z \, V_y \\ U_z \, V_x - U_x \, V_z \\ U_x \, V_y - U_y \, V_x \end{Bmatrix} \tag{A.14}$$

A.3 Produit mixte

On appelle produit mixte des trois vecteurs non nuls $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ le scalaire noté $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ défini par :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) \tag{A.15}$$

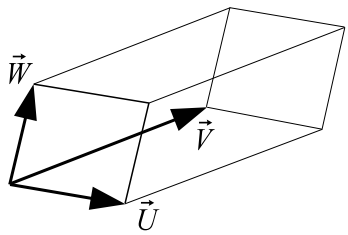


Figure 57 – *Produit mixte des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$*

Si le trièdre formé par les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ (figure 57) est direct, le produit mixte est égal au volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

Les principales propriétés du produit mixte sont :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} \tag{A.16}$$

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}) = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}) \tag{A.17}$$

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = -(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}) = -(\vec{U}, \vec{W}, \vec{V}) \tag{A.18}$$

Si $\{U\}^{\mathrm{T}} = \{U_x, U_y, U_z\}^{\mathrm{T}}$, $\{V\}^{\mathrm{T}} = \{V_x, V_y, V_z\}^{\mathrm{T}}$ et $\{W\}^{\mathrm{T}} = \{W_x, W_y, W_z\}^{\mathrm{T}}$ sont respectivement les composantes des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dans le repère orthonormé $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on a :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \det\begin{bmatrix}\{U\} & \{V\} & \{W\}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} U_x & V_x & W_x \\ U_y & V_y & W_y \\ U_z & V_z & W_z \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

B Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels

Soit $[S]$ une matrice symétrique à coefficients réels de dimension n.

B.1 Définitions

λ_i est valeur propre de la matrice $[S]$ si :

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i\} \quad , \quad \{u_i\} \neq \{0\} \tag{B.1}$$

où $\{u_i\}$ est le vecteur propre associé que nous choisirons unitaire : $\{u_i\}^{\mathrm{T}} \{u_i\} = 1$.

L'équation (B.1) peut s'écrire :

$$([S] - \lambda_i [\mathrm{I}]) \{u_i\} = \{0\} \quad , \quad \{u_i\} \neq \{0\} \tag{B.2}$$

où $[\mathrm{I}]$ est la matrice unité de dimension n. Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $\{u_i\} = \{0\}$ que si et seulement si la matrice $[S] - \lambda_i [\mathrm{I}]$ est singulière : les valeurs propres sont les solutions de l'équation polynomiale de degré n à coefficients réels :

$$P(\lambda_i) = \det([S] - \lambda_i [\mathrm{I}]) = 0 \tag{B.3}$$

La matrice $[S]$ a donc n valeurs propres réelles ou imaginaires conjuguées. $P(\lambda_i)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $[S]$.

B.2 Propriétés

Les principales propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres sont :

– Les n valeurs propres sont réelles distinctes ou non.

  Soit λ_i une valeur propre imaginaire et $\{u_i\}$ le vecteur propre associé. La matrice $[S]$ étant réelle, λ_i^* imaginaire conjugué de λ_i est valeur propre. Le vecteur propre associé $\{u_i^*\}$ est imaginaire conjugué de $\{u_i\}$. On a :

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i\} \quad , \quad [S]\{u_i^*\} = \lambda_i^* \{u_i^*\} \tag{B.4}$$

  Multiplions la première de ces deux équations par $\{u_i^*\}^{\mathrm{T}}$ et la deuxième par $\{u_i\}^{\mathrm{T}}$. Il vient :

$$\{u_i^*\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_i\} = \lambda_i \{u_i^*\}^{\mathrm{T}} \{u_i\} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned} \{u_i\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_i^*\} &= \lambda_i^* \{u_i\}^{\mathrm{T}} \{u_i^*\} = \lambda_i^* \{u_i^*\}^{\mathrm{T}} \{u_i\} \\ &= \{u_i^*\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_i\} \qquad \text{(la matrice } [S] \text{ est symétrique)} \end{aligned} \tag{B.6}$$

d'où :

$$0 = (\lambda_i - \lambda_i^*)\,\{u_i^*\}^{\mathrm{T}}\,\{u_i\} \tag{B.7}$$

Si $\{u_i\} \neq \{0\}$, on en déduit $\lambda_i = \lambda_i^*$: la valeur propre λ_i est réelle.

– Si deux valeurs propres λ_i et λ_j sont distinctes, les vecteurs propres associés $\{u_i\}$ et $\{u_j\}$ sont orthogonaux.

En effet, on a :

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i\,\{u_i\} \quad , \quad [S]\{u_j\} = \lambda_j\,\{u_j\} \tag{B.8}$$

Multiplions la première de ces deux équations par $\{u_j\}^{\mathrm{T}}$ et la deuxième par $\{u_i\}^{\mathrm{T}}$. Il vient :

$$\{u_j\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_i\} = \lambda_i\,\{u_j\}^{\mathrm{T}}\,\{u_i\} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}\{u_i\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_j\} &= \lambda_j\,\{u_i\}^{\mathrm{T}}\,\{u_j\} = \lambda_j\,\{u_j\}^{\mathrm{T}}\,\{u_i\} \\ &= \{u_j\}^{\mathrm{T}}[S]\{u_i\} \qquad \text{(la matrice } [S] \text{ est symétrique)}\end{aligned} \tag{B.10}$$

d'où :

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j)\,\{u_j\}^{\mathrm{T}}\,\{u_i\} \tag{B.11}$$

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, on en déduit $\{u_j\}^{\mathrm{T}}\,\{u_i\} = 0$: les vecteurs $\{u_i\}$ et $\{u_j\}$ sont orthogonaux.

– On peut toujours trouver un ensemble de n vecteurs orthogonaux $\{u_1\}, \ldots, \{u_n\}$ tels que :

$$[S]\,[U] = [U]\,[\Lambda] \tag{B.12}$$

où

$$[U] = \big[\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \ldots \quad \{u_n\}\big] \quad , \quad [U]^{\mathrm{T}}\,[U] = [U]\,[U]^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \tag{B.13}$$

et

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

– La somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice $[S]$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\,[S] \tag{B.15}$$

– Le produit des valeurs propres est égal au déterminant de la matrice $[S]$:

$$\lambda_1\,\lambda_2\,\cdots\,\lambda_n = \det\,[S] \tag{B.16}$$

B.3 Décomposition spectrale

La matrice $[S]$ s'écrit en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres :

$$[S] = [U]\,[\Lambda]\,[U]^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\{u_i\}\{u_i\}^{\mathrm{T}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \{u_i\}\{u_i\}^{\mathrm{T}} = [\,\mathrm{I}\,] \tag{B.17}$$

Remarque : la matrice $[S]^p$:

$$[S]^p = \underbrace{[S][S]\ldots[S]}_{p\,\text{fois}} \tag{B.18}$$

a les mêmes vecteurs propres que la matrice $[S]$:

$$[S]\{u_i\} = \lambda_i\{u_i\} \quad , \quad [S]^p\{u_i\} = \lambda_i^p\{u_i\} \tag{B.19}$$

d'où :

$$[S]^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \, \{u_i\}\{u_i\}^{\mathrm{T}} \tag{B.20}$$

B.4 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique de dimension deux

Considérons la matrice symétrique $[S]$:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad , \quad (\, [S]^{\mathrm{T}} = [S] \,) \tag{B.21}$$

Les valeurs propres $S_{n=1,2}$ et les vecteurs propres $\{n\}$ sont les solutions de l'équation :

$$[S]\{n\} = S_n\{n\} \quad , \quad \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = S_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \tag{B.22}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B.23}$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $n_x = n_y = 0$ que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} = 0 \tag{B.24}$$

d'où l'équation polynomiale en S_n :

$$S_n^2 - \underbrace{(S_{xx} + S_{yy})}_{\mathrm{tr}\,[S]=S_1+S_2} \, S_n + \underbrace{S_{xx}\, S_{yy} - S_{xy}^2}_{\det[S]=S_1\, S_2} = 0 \tag{B.25}$$

et les valeurs propres :

$$\left.\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}\right\} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4\, S_{xy}^2} \tag{B.26}$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{Bmatrix} \tag{B.27}$$

avec :

$$\tan\theta_1 = \frac{S_1 - S_{xx}}{S_{xy}} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{S_2 - S_{xx}}{S_{xy}} \quad , \quad \tan 2\,\theta_1 = \tan 2\,\theta_2 = \frac{2\, S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \tag{B.28}$$

Remarque : les deux directions principales sont orthogonales :

$$|\, \theta_1 - \theta_2 \,| = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tan\theta_1 \, \tan\theta_2 = -1 \tag{B.29}$$

C Dépouillement des rosettes d'extensométrie : programme Scilab 5.3.1

```
//  Dépouillement d'une rosette d'extensométrie

// angle de la rosette : 45, 60 ou 120 degrés
phi=45
if phi~=[45,60,120]
    then halt('phi doit être égal à 45, 60 ou 120 degrés')
end

// matériau
E=210000       // module de Young
nu=0.27        // coefficient de Poisson

// allongements unitaires mesurés
epsa=-100E-6
epsb=-450E-6
epsc=400E-6

// calcul des déformations exx , eyy , ezz et gxy
// l'axe x est l'axe de la jauge a
rphi=phi*%pi/180;     // angle en radians
c=cos(rphi);s=sin(rphi);
exx=epsa;
eyy=(epsa*(2*c^2-1)+2*epsb*(1-2*c^2)+epsc)/(2*s^2);
gxy=(epsa*(1-4*c^2)+4*c^2*epsb-epsc)/(2*s*c);
ezz=-nu*(exx+eyy)/(1-nu);

// calcul des contraintes sxx, syy et sxy
c=E/(1-nu^2);
sxx=c*(exx+nu*eyy);
syy=c*(eyy+nu*exx);
G=E/2/(1+nu); // module d'élasticité transversal
sxy=G*gxy;

// tenseur des contraintes
sigma=[sxx,sxy,0;sxy,syy,0;0,0,0]

// contraintes principales
d=0.5*(sxx+syy);
r=0.5*sqrt((sxx-syy)^2+4*sxy^2);
sig1=d+r
sig2=d-r
sig3=0

// angle en degrés de la direction principale n1 avec la jauge a
t1=atan((sig1-sxx)/sxy)*180/%pi

// tenseur des déformations
epsilon=[exx,1/2*gxy,0;1/2*gxy,eyy,0;0,0,ezz]

// déformations principales
eps1=(sig1-nu*sig2)/E
eps2=(sig2-nu*sig1)/E
eps3=ezz
```

```
// déformation volumique dV/V
epsV=trace(epsilon)

// contraintes de Von Mises et Tresca
Von_Mises=sqrt(sig1^2+sig2^2-sig1*sig2)
Tresca=max(sig1,sig2,0)-min(sig1,sig2,0)

// cisaillement maximal
tau_max=0.5*Tresca

// énergie de déformation par unité de volume en MPa
energie=0.5*(sxx*exx+syy*eyy+sxy*gxy)
// ou
energie=0.5*trace(sigma*epsilon)

// énergie de déformation par unité de volume en J/m3
energie=energie*1e6

//   éditions   ==================================================

printf('\n\nRosette d''extensométrie à %3d degrés\n\n',phi);
printf('Module de Young : %8.0f MPa\n\n',E)
printf('Coefficient de Poisson : %5.2f\n\n',nu)
printf('Mesures : epsa = %5.0f E-6 ,  epsb = %5.0f E-6 ,  epsc = %5.0f E-6\n\n',
    epsa*1E6,epsb*1E6,epsc*1E6)
printf('Déformations principales : eps1 = %5.0f E-6 ,  eps2 = %5.0f E-6 ,  eps3 
    = %5.0f E-6\n\n',eps1*1E6,eps2*1E6,eps3*1E6)
printf('Déformation volumique : epsV = %5.0f E-6\n\n',epsV*1E6)
printf('Contraintes principales : sig1 = %5.2f MPa ,  sig2 = %5.2f MPa , sig3 = 
    0\n\n',sig1,sig2)
printf('Angle de la direction principale n1 avec la jauge a : %5.2f degrés\n\n',
    t1)
printf('Contraintes de Von Mises = %5.2f MPa\n\n',Von_Mises)
printf('Contraintes de Tresca = %5.2f MPa\n\n',Tresca)
printf('Énergie de déformation par unité de volume : %6.0f J/m3\n\n',energie)
```

Références

[1] J. Avril – *Encyclopédie d'analyse des contraintes*, Vishay-Micromesures, 1984.

[2] C. Bacon et J. Pouyet – *Mécanique des solides déformables*, Hermès, 2000.

[3] Y. Bamberger – *Mécanique de l'ingénieur, III. Solides déformables*, Hermann, 1981.

[4] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre et C. Laberge – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.

[5] D. Bellet et J.-J. Barrau – *Cours d'élasticité*, Cépaduès, 1990.

[6] R. Boudet et P. Stephan – *Résistance des matériaux*, Cépaduès, 1998.

[7] L. Chevalier – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.

[8] J. Coirier et C. Nadot-Martin – *Mécanique des milieux continus*, 3 éd., Dunod, 2007.

[9] J. Courbon – *Résistance des matériaux, Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1964.

[10] — , *Résistance des matériaux, Tome 2*, Dunod, 1965.

[11] — , *Éléments de résistance des matériaux*, Dunod, 1970.

[12] R. Cravero – *Bases pour la résistance des matériaux*, Ellipses, 1997.

[13] D. Dartus – *Élasticité linéaire*, Cépaduès, 1995.

[14] M. Del Pedro, T. Gmür et J. Botsis – *Introduction à la mécanique des solides et des structures*, 2 éd., Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.

[15] S. Dubigeon – *Mécanique des milieux continus*, Technique et documentation, 1998.

[16] H. Dumontet, G. Duvaut, F. Léné, P. Muller et N. Turbé – *Exercices corrigés de mécanique des milieux continus*, Dunod, 1998.

[17] G. Duvaut – *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.

[18] F. Frey – *Traité du génie civil, Volume 3. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des solides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.

[19] D. Gay et J. Gambelin – *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.

[20] J. M. Gere et S. P. Timoshenko – *Mechanics of materials*, 3 éd., Chapman & Hall, 1995.

[21] P. Germain et P. Muller – *Introduction à la mécanique des milieux continus*, 2 éd., Masson, 1995.

[22] J.-P. Henry et F. Parcy – *Cours d'élasticité*, Dunod, 1982.

[23] L. D. Landau et E. M. Lifshitz – *Théorie de l'élasticité*, 2 éd., Éditions Mir, 1967.

[24] S. Laroze – *Mécanique des structures, Tome 1. Solides élastiques. Plaques et coques*, Cépaduès, 2005.

[25] P. Le Tallec – *Modélisation et calcul des milieux continus*, Éditions de l'École polytechnique, 2009.

[26] J. Lemaitre, P.-A. Boucard et F. Hild – *Résistance mécanique des solides*, Dunod, 2007.

[27] A. E. H. Love – *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4 éd., Dover, 1944.

[28] J. Mandel – *Cours de mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, 1966. Réédition Jacques Gabay, 1995.

[29] C. Massonnet – *Résistance des matériaux, Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1968.

[30] — , *Résistance des matériaux, Tome 2*, 2 éd., Dunod, 1968.

[31] C. Massonnet et S. Cescotto – *Mécanique des matériaux*, De Boeck Université, 1994.

[32] R. Mindlin – « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **18** (1951), p. 31–38.

[33] E. Reissner – « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *Journal of Applied Mechanics, ASME* **12** (1945), p. 69–77.

[34] P. Royis – *Mécanique des milieux continus. Cours, exercices et problèmes*, Presses Universitaires de Lyon (Collection ENTPE), 2005.

[35] J. Salençon – *Mécanique des milieux continus, Tome 1. Concepts généraux*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.

[36] — , *Mécanique des milieux continus, Tome 2. Thermoélasticité*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.

[37] — , *Mécanique des milieux continus, Tome 3. Milieux curvilignes*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.

[38] L. Sédov – *Mécanique des milieux continus, Tome I*, Éditions Mir, 1975.

[39] I. S. Sokolnikoff – *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, 1956.

[40] S. P. Timoshenko – *History of strength of materials*, Dover, 1983.

[41] S. P. Timoshenko et J. N. Goodier – *Théorie de l'élasticité*, 2 éd., Béranger, 1968.

[42] — , *Theory of elasticity*, 3 éd., McGraw-Hill, 1970.

[43] S. P. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger – *Theory of plates and shells*, 2 éd., McGraw-Hill, 1969.

[44] C. Wielgoz – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.