RDM – Flexion
Manuel d'utilisation

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html

10 avril 2006 – 29 mars 2011

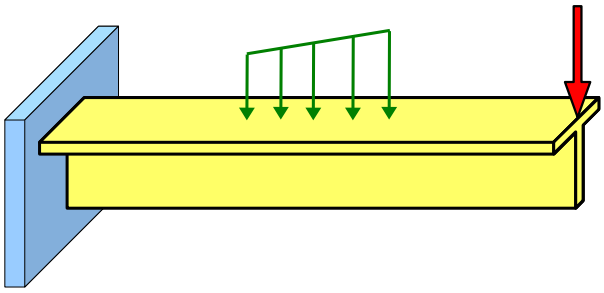


Table des matières

1 Présentation **1**

2 Principes de la modélisation **2**

3 Commandes utilitaires **2**
3.1 Modifier la configuration du logiciel . . . 2
3.2 Afficher les ressources disponibles . . . 2
3.3 Quitter une procédure modale . . . 3
3.4 Consulter la dimension des tableaux . . . 3
3.5 Exporter un dessin . . . 3
3.6 Imprimer le dessin . . . 3
3.7 Afficher les attributs une entité . . . 3
3.8 Modifier les unités « utilisateur » . . . 3

4 Modélisation **4**
4.1 Créer une nouvelle poutre . . . 4
4.2 Rappeler une poutre . . . 4
4.3 Enregistrer les données . . . 4
4.4 Ajouter un nœud . . . 4
4.5 Supprimer un nœud inutile . . . 4
4.6 Éditer les données et les résultats . . . 4
4.7 Définir les sections droites . . . 4
4.7.1 Définir une section droite quelconque . . . 5
4.7.2 Lire une section droite dans la bibliothèque . . . 5
4.7.3 Lire une section droite dans la bibliothèque de l'utilisateur . . . 5
4.7.4 Définir une section droite paramétrée . . . 5
4.8 Définir le matériau . . . 8
4.8.1 Modifier les attributs du matériau . . . 8
4.8.2 Lire un matériau dans la bibliothèque . . . 8
4.8.3 Lire un matériau dans la bibliothèque de l'utilisateur . . . 8
4.9 Définir les liaisons . . . 8
4.10 Définir les charges . . . 9

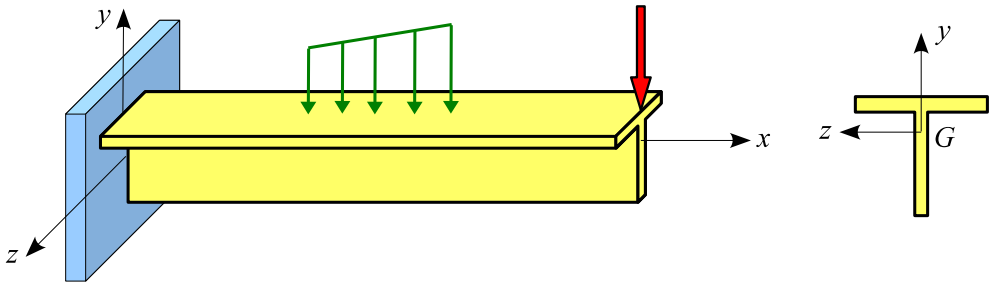
5 Calculs et résultats **9**
5.1 Paramètre du calcul . . . 9
5.2 Graphes . . . 9
5.3 Valeur d'un graphe en un point . . . 10
5.4 Précision du tracé . . . 10
5.5 Déplacements nodaux, actions de liaisons, efforts sur un élément . . . 10
5.6 Éditer les données et les résultats . . . 10
5.7 Optimiser la section droite . . . 10

6 Exemples **12**
6.1 Exemple 1 . . . 12
6.2 Exemple 2 . . . 14
6.3 Exemple 3 – rotule intérieure . . . 16
6.4 Exemple 4 – appui simple élastique . . . 17
6.5 Exemple 5 – déplacement d'appui . . . 18
6.6 Exemple 6 – appui élastique . . . 19
6.7 Exemple 7 – poutre en T : déplacements et contraintes . . . 20

6.8 Exemple 8 – dimensionnement d'une poutre soumise à son poids propre 21

1 Présentation

RDM – Flexion est un logiciel destiné à l'**analyse statique**, par la **méthode des éléments finis**, des **poutres droites** sollicitées en **flexion simple**.



Nous adopterons les **conventions** et les **hypothèses** suivantes :

- l'axe x est la fibre moyenne de la poutre.
- le plan xy est un plan de symétrie de la poutre.
- l'axe z forme avec x et y un trièdre direct ; les axes y et z sont les axes centraux principaux de la section droite.
- le matériau est homogène et isotrope ; son comportement est linéaire et élastique.
- les déplacements sont petits.
- les déformations sont petites.
- au cours de la mise en charge, les sections droites restent planes et normales à la déformée de la fibre moyenne (hypothèse de **Bernoulli**).

Le logiciel prend en compte :

- les charges ponctuelles.
- les charges réparties linéairement.
- le poids propre de la poutre.
- les déplacements d'appui.
- les appuis élastiques.

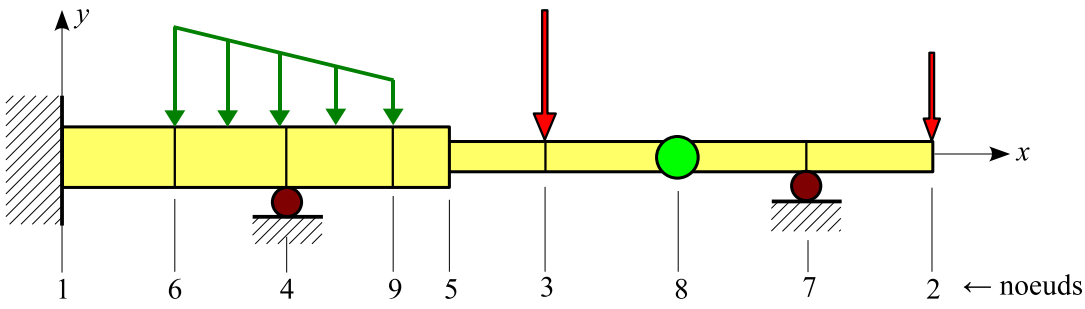
Compléments théoriques et références :

`http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/cours/flexion_xy.pdf`

2 Principes de la modélisation

Le calcul d'une structure par la méthode des éléments finis implique sa **discrétisation** (maillage). Dans le cas d'une poutre droite, cette opération se réduit à la **création des nœuds**.

Considérons la poutre suivante :



Un nœud sert à localiser :

- les extrémités de la poutre : nœuds 1 et 2.
- un changement de section droite : nœud 5.
- le point d'application d'une charge ponctuelle : nœuds 2 et 3.
- les extrémités d'une charge répartie : nœuds 6 et 9.
- une liaison intérieure (articulation) : nœud 8.
- une liaison extérieure : nœuds 1, 4 et 7.

Sur notre exemple, les 9 **nœuds** discrétisent la structure en 8 **éléments** : $1-6$, $6-4$, $\ldots$, $7-2$.

3 Commandes utilitaires

3.1 Modifier la configuration du logiciel

Sélectionner le menu **Configurer RDM** du menu **Outils**.

- Entrer les dimensions de l'écran **en mm**.
- Définir la couleur du fond.
- Sélectionner la couleur des boutons.

...

3.2 Afficher les ressources disponibles

Sélectionner la commande **Ressources disponibles**.

3.3 Quitter une procédure modale

Pointer dans la zone des menus, presser la touche **Échap** du clavier ou le bouton droit de la souris.

3.4 Consulter la dimension des tableaux

Cette commande fournit la dimension des tableaux : nœuds, liaisons, charges, ...

Sélectionner la commande **Dimension des tables**.

3.5 Exporter un dessin

1. Sélectionner la commande **Exporter** du menu **Fichier**.
2. Sélectionner le **format** du fichier :
   - **WMF** (Métafichier).
   - **EMF** (Métafichier étendu).
3. Entrer la longueur du dessin (en cm).
4. Entrer le nom du fichier (sans extension).

3.6 Imprimer le dessin

1. Sélectionner la commande **Imprimer** du menu **Fichier**.
2. Entrer la dimension du dessin (en cm).

3.7 Afficher les attributs une entité

Cette commande permet d'afficher les attributs d'une entité : nœud, élément, ... Le résultat dépend du dessin courant.

Désigner une entité à l'aide du **Bouton droit de la souris**.

3.8 Modifier les unités « utilisateur »

Sélectionner la commande **Unités**.

Les principales unités « utilisateur » (entrées/sorties) disponibles sont :

- ***longueur*** : **mètre , centimètre , millimètre**
- ***force*** : **Newton, décaNewton, kiloNewton**
- ***contrainte*** : **Pascal, mégaPascal**, ...
- ***angle*** : **radian , degré**
- ***température*** : **Kelvin , degré Celcius**

4 Modélisation

4.1 Créer une nouvelle poutre

1. Sélectionner la commande **Nouvelle étude** du menu **Fichier**.
2. Entrer le nombre de nœuds.
3. Entrer les abscisses des nœuds qui serviront de support aux premières constructions.

4.2 Rappeler une poutre

1. Sélectionner la commande **Ouvrir** du menu **Fichier**.
2. Entrer le nom du fichier.

4.3 Enregistrer les données

1. Sélectionner la commande **Enregistrer** du menu **Fichier**.
2. Entrer le nom du fichier.

   Les données sont sauvegardées dans un fichier dont l'**extension** est **.fle** . Par défaut, le programme effectue une sauvegarde dans le fichier **$$$.fle**.

4.4 Ajouter un nœud

1. Sélectionner la commande **Nœud** du menu **Modéliser**.
2. Entrer l'abscisse du nœud.

4.5 Supprimer un nœud inutile

1. Sélectionner la commande **Supprimer un nœud** du menu **Modéliser**.
2. Désigner un nœud.

4.6 Éditer les données et les résultats

Sélectionner la commande **Éditer** du menu **Fichier**.

4.7 Définir les sections droites

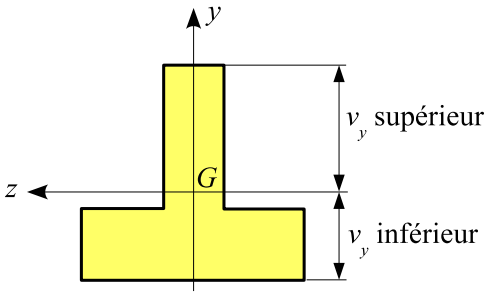
Sélectionner la commande **Section droite** du menu **Modéliser**.

La première section droite définie est attribuée à toute la poutre. Pour les suivantes, désigner le nœud origine puis le nœud extrémité du tronçon de poutre concerné.

4.7.1 Définir une section droite quelconque

Entrer les caractéristiques de la section :

- le nom : rond plein, IPN, ...
- la désignation : diamètre 20 pour un rond plein, 160 pour un IPN, ...
- l'aire (en cm^2).
- le moment quadratique par rapport à l'axe z : I_z (en cm^4).
- la position (en mm) des fibres extrêmes par rapport à l'axe Gz ou le module élastique de flexion par rapport à l'axe z : $W_{el.z}$ (en cm^3). (G est le centre de gravité de la section).



$$W_{el.z} = \frac{I_z}{\max\left(v_{y\ \text{supérieur}}, v_{y\ \text{inférieur}}\right)}$$

Remarque : si les deux valeurs $v_{y\ \text{supérieur}}$ et $v_{y\ \text{inférieur}}$ sont égales, une seule valeur suffit ; si v_y est défini, $W_{el.z}$ est ignoré.

4.7.2 Lire une section droite dans la bibliothèque

1. Définir le type de profil : IPN , IPE , carré creux, ... et éventuellement son orientation.
2. Désigner un profilé dans la table.

4.7.3 Lire une section droite dans la bibliothèque de l'utilisateur

1. Sélectionner la commande **Bibliothèque de profilés de l'utilisateur** [1].
2. Définir le type de profil : IPN , IPE , carré creux, ... et éventuellement son orientation.
3. Désigner un profilé dans la table.

4.7.4 Définir une section droite paramétrée

1. Désigner le type de section.
2. Entrer les dimensions de la section (en mm) et éventuellement son orientation :

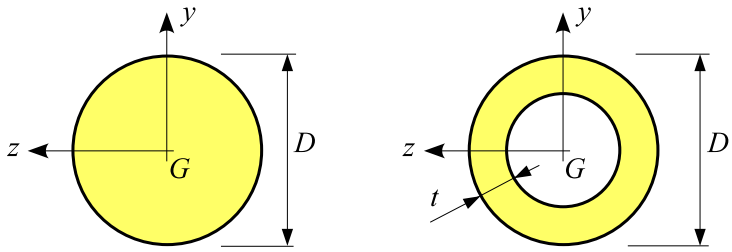
Rond plein :

Diamètre D.

1. Manuel d'utilisation de RDM-Ossatures (§ Bibliothèque de l'utilisateur)

Rond creux :

- Diamètre extérieur D.
- Épaisseur t.

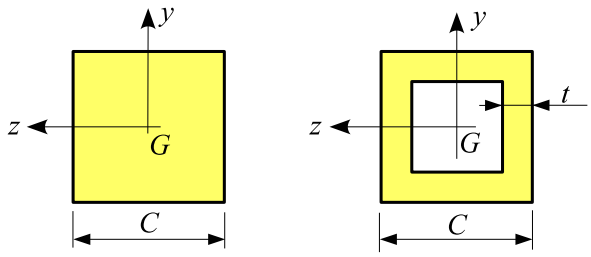


Carré plein :

Côté C.

Carré creux :

- Côté extérieur C.
- Épaisseur t.

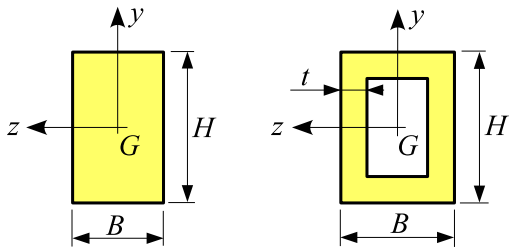


Rectangle plein :

- Base B.
- Hauteur H.

Rectangle creux d'épaisseur constante :

- Base B.
- Hauteur H.
- Épaisseur t.

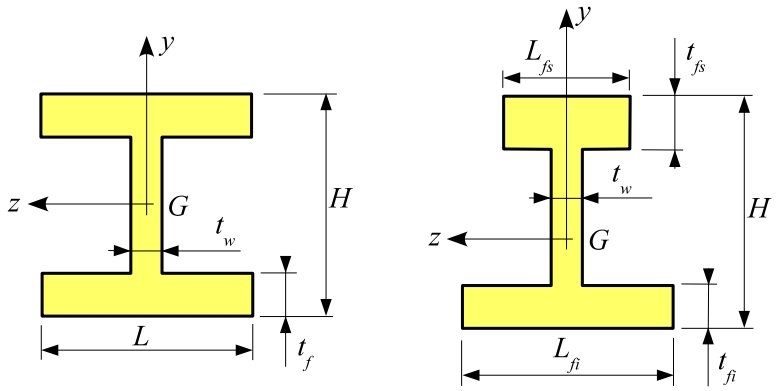


I à ailes égales :

- Hauteur H.
- Longueur des ailes L.
- Épaisseur de l'âme t_w.
- Épaisseur des ailes t_f.
- Orientation : 0° ou 90°.

I à ailes inégales :

- Hauteur H.
- Longueur de l'aile supérieure L_{fs}.
- Longueur de l'aile inférieure L_{fi}.
- Épaisseur de l'âme t_w.
- Épaisseur de l'aile supérieure t_{fs}.
- Épaisseur de l'aile inférieure t_{fi}.

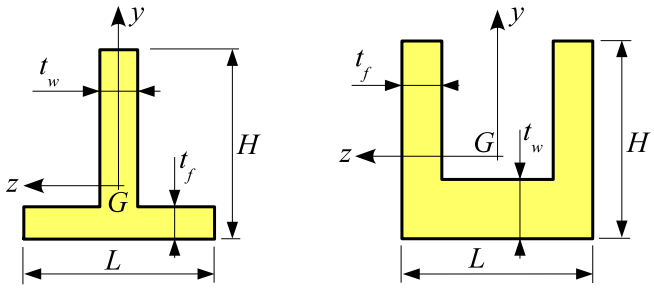


T à ailes égales :

- Hauteur H.
- Longueur L.
- Épaisseur de l'âme t_w.
- Épaisseur des ailes t_f.
- Orientation : 0° ou 180°.

U à ailes égales :

- Longueur L.
- Hauteur H.
- Épaisseur de l'âme t_w.
- Épaisseur des ailes t_f.
- Orientation : 0° ou 180°.



4.8 Définir le matériau

Une poutre est constituée d'un seul matériau. Par défaut, ce matériau est l'acier.

4.8.1 Modifier les attributs du matériau

1. Sélectionner la commande **Matériau**.
2. Entrer le module de Young, la masse volumique et la limite élastique du matériau.

4.8.2 Lire un matériau dans la bibliothèque

1. Sélectionner la commande **Bibliothèque de matériaux**.
2. Désigner un matériau.

4.8.3 Lire un matériau dans la bibliothèque de l'utilisateur

1. Sélectionner la commande **Bibliothèque de matériaux de l'utilisateur** [2].
2. Désigner un matériau.

4.9 Définir les liaisons

Chaque nœud possède deux degrés de liberté : la flèche v et la pente θ_z.

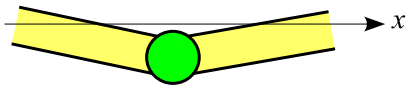
Les liaisons de la structure avec l'extérieur peuvent être du type :

- appui simple : $v = 0$.
- pente nulle : $\theta_z = 0$.
- encastrement : $v = \theta_z = 0$.
- flèche imposée.
- pente imposée.
- appui élastique de raideur K :
  - en translation : $F_y = -K\,v$

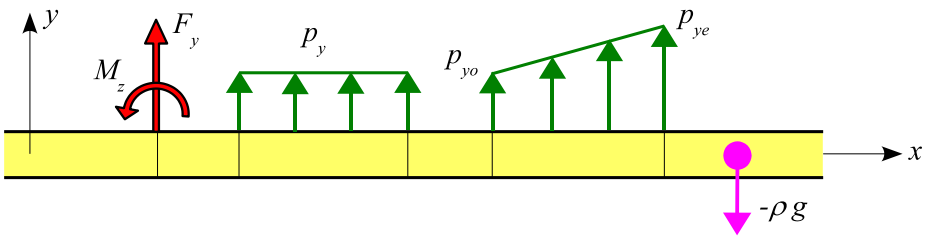
2. Manuel d'utilisation de RDM-Ossatures (§ Bibliothèque de l'utilisateur)

– en rotation : $M_z = -K\,\theta_z$

La poutre peut être en plusieurs morceaux, reliés entre eux par une rotule. Il s'agit pour la poutre d'une **liaison intérieure**. En ce nœud, le moment fléchissant est nul, la flèche est continue et la pente est discontinue.



4.10 Définir les charges



Les sollicitations prises en compte sont :

– **force et couple nodaux** : ils sont définis par leur intensité F_y et M_z.

– **force répartie uniformément entre deux nœuds** : la force est définie par son intensité linéique p_y.

– **force répartie linéairement entre deux nœuds** : la force est définie par son intensité linéique à l'origine p_{yo} et à l'extrémité p_{ye}.

– le **poids propre** de la poutre.

5 Calculs et résultats

5.1 Paramètre du calcul

Sélectionner la commande **Paramètres du calcul** du menu **Modéliser**.

Entrer l'accélération de la pesanteur.

5.2 Graphes

Les graphes suivants sont disponibles :

– **déformée** (déplacement suivant y) : $v(x)$.

– **pente** (rotation des sections droites suivant z) : $\theta_z(x)$.

- **effort tranchant** : $T_y(x)$.
- **moment fléchissant** : $Mf_z(x)$.
- **contrainte normale sur la fibre supérieure et la fibre inférieure**.

  Rappel : $\sigma_{xx}(x, y) = -\dfrac{y}{I_z} Mf_z(x)$
- **courbes iso-contrainte normale**.

5.3 Valeur d'un graphe en un point

Cette commande permet d'extraire la valeur en un point du graphe représenté sur l'écran.

1. Sélectionner la commande **Valeur en un point** du menu **Résultats**.
2. Entrer l'abscisse du point.

5.4 Précision du tracé

Cette commande permet d'afficher le nombre de points qui définissent le graphe représenté sur l'écran.

Sélectionner la commande **Précision** du menu **Résultats**.

5.5 Déplacements nodaux, actions de liaisons, efforts sur un élément

Désigner une entité (nœud ou élément) à l'aide du bouton droit de la souris.

5.6 Éditer les données et les résultats

Sélectionner la commande **Éditer** du menu **Fichier**.

5.7 Optimiser la section droite

Activer le menu **Optimiser**.

1. **Changer les limites admissibles** :
   - Sélectionner le menu **Limites**.
   - Définir :
     - la contrainte maximale admissible.
     - la flèche maximale admissible.
     - la pente maximale admissible.
2. **Choisir le type de section droite** :
   - Sélectionner le menu **Section droite**.

– Désigner le type de section droite : rond plein, carré plein, IPN, HEA, ...

3. **Lancer le calcul** :

   Sélectionner la commande **Calculer**.

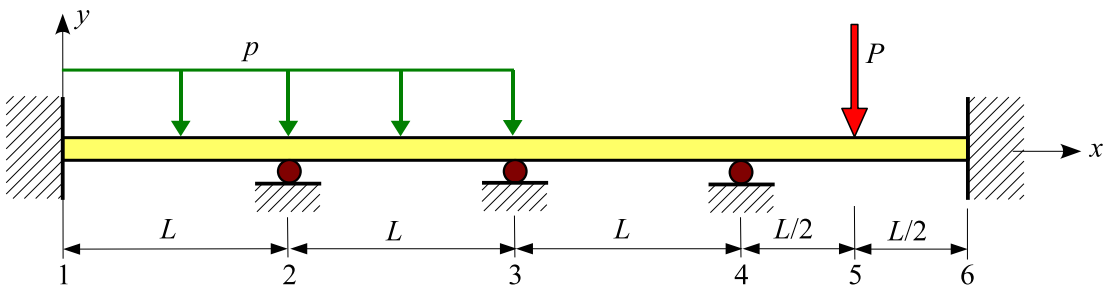
   Remarque : pour une section droite de type IPN, HEA, ..., le programme recherche, dans la bibliothèque, la section droite la plus légère qui convient.

6 Exemples

6.1 Exemple 1

Référence : *solution analytique.*

Considérons la poutre continue, de section droite constante, représentée sur la figure.



Soit E le module de Young du matériau.

La section droite est un rectangle plein de base B et de hauteur H.

Les sections 1 et 6 sont encastrées. La poutre repose sur trois appuis simples en 2, 3 et 4.

Elle est soumise entre les nœuds 1 et 3 à une charge uniformément répartie d'intensité linéique $(0, p, 0)$. Le nœud 5 porte une force d'intensité $(0, P, 0)$.

On donne :

$L = 0.7$ m , $B = 50$ mm , $H = 60$ mm
$E = 200000$ MPa
$p = -20000$ N/m , $P = -5000$ N

Les étapes de la modélisation sont :

1. **Nouvelle étude**

   – la poutre est discrétisée en 5 éléments (6 nœuds)
   – entrer les abscisses des nœuds : 0 , 0.7 , 1.4 , 2.1 , 2.45 , 2.8 m

2. **Matériau**

   – le module de Young est égal à 200000 MPa

3. **Section droite**

   – la section droite est un rectangle plein de base 50 mm et de hauteur 60 mm

4. **Liaisons**

   – les sections 1 et 6 sont encastrées
   – la poutre repose sur un appui simple en 2, 3 et 4

5. **Charges**

   – le nœud 5 porte une force ponctuelle d'intensité -5000 N
   – la poutre porte, entre les nœuds 1 et 3, une force uniformément répartie d'intensité -20000 N/m

6. **Résultats**

   On obtient :

   – déplacements nodaux :

$$\theta_{2z} = \frac{PL^2}{896\,EI_z} + \frac{pL^3}{336\,EI_z} = -0.007369^\circ \quad , \quad \theta_{3z} = -\frac{PL^2}{224\,EI_z} - \frac{pL^3}{84\,EI_z} = 0.029477^\circ$$

$$\theta_{4z} = \frac{15\,PL^2}{896\,EI_z} + \frac{pL^3}{336\,EI_z} = -0.019555^\circ$$

$$\theta_{5z} = -\frac{15\,PL^2}{3584\,EI_z} - \frac{pL^3}{1344\,EI_z} = 0.004889^\circ \quad , \quad v_5 = \frac{157\,PL^3}{21504\,EI_z} + \frac{pL^4}{2688\,EI_z} = -0.079487 \text{ mm}$$

   – actions de liaisons :

$$F_{1y} = \frac{3\,P}{448} - \frac{27\,pL}{56} = 6716.52 \text{ N} \quad , \quad M_{1z} = \frac{PL}{448} - \frac{13\,pL^2}{168} = 750.52 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -\frac{3\,P}{112} - \frac{15\,pL}{14} = 15133.93 \text{ N} \quad , \quad F_{3y} = \frac{3\,P}{32} - \frac{pL}{2} = 6531.25 \text{ N}$$

$$F_{4y} = -\frac{53\,P}{112} + \frac{pL}{14} = 1366.07 \text{ N}$$

$$F_{6y} = -\frac{269\,P}{448} - \frac{pL}{56} = 3252.23 \text{ N} \quad , \quad M_{6z} = \frac{71\,PL}{448} + \frac{pL^2}{168} = -613.02 \text{ N.m}$$

   Remarque : pour extraire ces quantités, utiliser l'une des procédures suivantes :

   – Éditer les résultats.
   – Désigner un nœud ou un élément à l'aide du bouton droit de la souris.

   On a de plus :

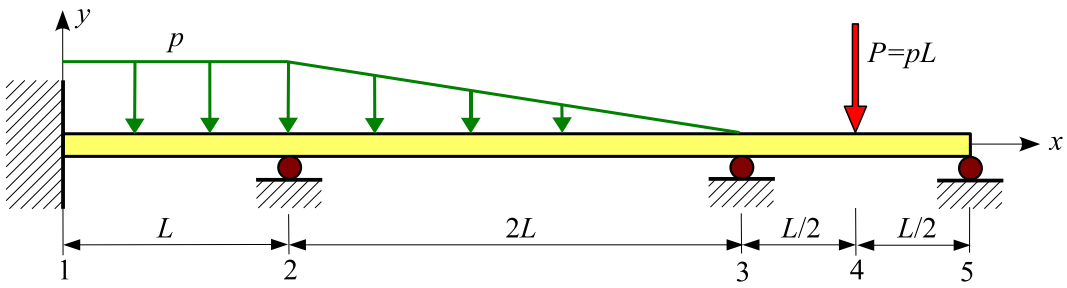
$$v\left(\frac{3\,L}{2} = 1.05 \text{ m}\right) = \frac{5\,PL^3}{7168\,EI_z} + \frac{pL^4}{224\,EI_z} = -0.125743 \text{ mm}$$

$$v\left(\frac{5\,L}{2} = 1.75 \text{ m}\right) = -\frac{19\,PL^3}{7168\,EI_z} - \frac{5\,pL^4}{2688\,EI_z} = 0.074879 \text{ mm}$$

6.2 Exemple 2

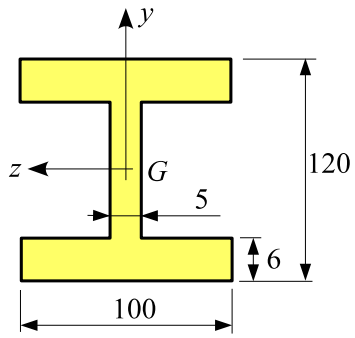
Référence : *solution analytique.*

Considérons la poutre continue de section droite constante :



La section droite est un I à ailes égales de dimensions :

$H = 120$, $L = 100$, $t_w = 5$, $t_f = 6$ (mm)



Soit E le module de Young du matériau.

La poutre est encastrée en 1 et repose sur trois appuis simples en 2, 3 et 5.

Elle est soumise, entre les nœuds 1 et 2, à une force uniformément répartie d'intensité linéique p. Le tronçon $2-3$ porte une force répartie dont l'intensité linéique varie entre p et 0. Le nœud 4 porte une force de composantes $(0, P = pL, 0)$.

On donne : $L = 1.2$ m , $E = 200000$ MPa , $p = -20000$ N/m

Les étapes de la modélisation sont :

1. **Nouvelle étude**

   – la poutre est discrétisée en 4 éléments (5 nœuds)
   – entrer les abscisses des nœuds : 0 , 1.2 , 3.6 , 4.2 , 4.8 m

2. **Matériau**

   le module de Young est égal à 200000 MPa

3. **Section droite**

   – la section droite est un I à ailes égales de dimensions (en mm) :

$$H = 120 \ , \ L = 100 \ , \ t_w = 5 \ , \ t_f = 6$$

4. **Liaisons**

   – le nœud 1 est encastré
   – les nœuds 2 , 3 et 5 reposent sur un appui simple

5. **Charges**

   – le nœud 4 porte une force $P = -24000$ N
   – la poutre porte entre les nœuds 1 et 2 une force uniformément répartie $p = -20000$ N/m
   – le tronçon $2-3$ porte une force répartie dont l'intensité linéique varie entre -20000 N/m et 0

6. **Résultats**

   On obtient :

   – déplacements nodaux :

$$\theta_{2z} = \frac{127\,pL^3}{6960\,EI_z} = -0.040806\,^\circ \quad , \quad \theta_{3z} = \frac{5\,pL^3}{696\,EI_z} = -0.016065\,^\circ$$

$$\theta_{4z} = \frac{77\,pL^3}{11136\,EI_z} = -0.015463\,^\circ \quad , \quad v_4 = \frac{233\,pL^4}{22272\,EI_z} = -0.489987 \text{ mm}$$

$$\theta_{5z} = -\frac{97\,pL^3}{2784\,EI_z} = 0.077917\,^\circ$$

   – actions de liaisons :

$$F_{1y} = -\frac{453\,pL}{1160} = 9372.41 \text{ N} \quad , \quad M_{1z} = -\frac{163\,pL}{3480} = 1348.97 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -\frac{5899\,pL}{4640} = 30512.07 \text{ N} \quad , \quad F_{3y} = -\frac{4659\,pL}{4640} = 24098.28 \text{ N}$$

$$F_{5y} = -\frac{155\,pL}{464} = 8017.24 \text{ N}$$

   – moments fléchissants :

$$Mf_{z2} = \frac{68\,pL^2}{435} = -4502.07 \text{ N.m} \quad , \quad Mf_{z3} = \frac{77\,pL^2}{464} = -4779.31 \text{ N.m}$$

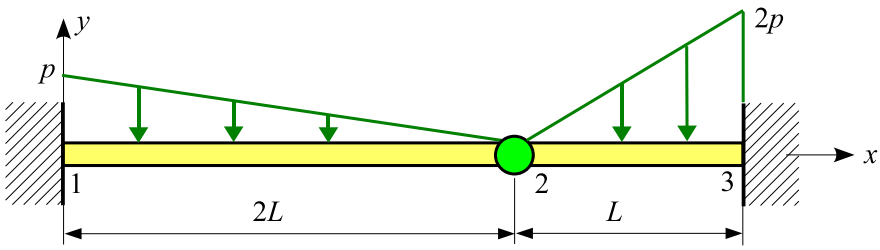
$$Mf_{z4} = -\frac{155\,pL^2}{928} = 4810.34 \text{ N.m}$$

6.3 Exemple 3 – rotule intérieure

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite représentée sur la figure est composée de deux tronçons $1-2$ et $2-3$ reliés entre eux par une rotule. L'ensemble est encastré en 1 et 3.



La poutre est un **rond creux** de diamètre extérieur D et d'épaisseur t. Soit E le module de Young du matériau.

La poutre porte deux charges triangulaires :

- entre les sections 1 et 2 : $p_{y1} = p$, $p_{y2} = 0$
- entre les sections 2 et 3 : $p_{y2} = 0$, $p_{y3} = 2\,p$

On donne :

$$E = 210000 \text{ MPa} \ , \ L = 0.4 \text{ m} \ , \ D = 40 \text{ mm} \ , \ t = 5 \text{ mm} \ , \ p = -6000 \text{ N/m}$$

Résultats :

Soit I_z est le moment quadratique de la section droite par rapport à z. On obtient :

- flèche en 2 : $v_2 = \dfrac{16\,pL^4}{135\,EI_z} = -1.009137 \text{ mm}$
- pente en 2 :
  - sur la poutre $1-2$: $\theta_{2z} = \dfrac{pL^3}{45\,EI_z} = -0.027103\,^\circ$
  - sur la poutre $2-3$: $\theta_{2z} = \dfrac{-29\,pL^3}{180\,EI_z} = 0.196495\,^\circ$
- actions de liaison :

$$F_{1y} = -\frac{38\,pL}{45} = 2026.67 \text{ N} \quad , \quad M_{1z} = -\frac{16\,pL^2}{45} = 341.33 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -\frac{52\,pL}{45} = 2773.33 \text{ N} \quad , \quad M_{3z} = \frac{22\,pL^2}{45} = -469.33 \text{ N.m}$$

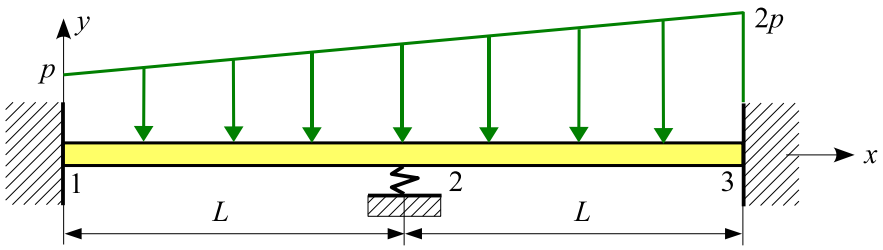
- effort tranchant en 2 : $T_{y2} = \dfrac{-7\,pL}{45} = 373.33 \text{ N}$

6.4 Exemple 4 – appui simple élastique

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite représentée sur la figure est encastrée en 1 et 3. Elle repose en son milieu 2 sur un appui élastique de raideur k.



La poutre est un IPE 100.

Soit E le module de Young du matériau.

La poutre porte sur toute sa longueur une force répartie dont l'intensité varie linéairement entre p et $2\,p$.

On donne :

$E = 200000$ MPa
$L = 1.2$ m
$k = 11000$ kN/m
$p = -10$ kN/m

Résultats :

Soit I_z est le moment quadratique de la section droite par rapport à Gz. On obtient :

– déplacements nodaux :

$$v_2 = \frac{3\,pL^4}{2\,(kL^3 + 24\,EI_z)} = -1.1428 \text{ mm} \quad , \quad \theta_{2z} = \frac{pL^3}{240\,EI_z} = -0.012061\,^\circ$$

– action de liaison en 2 :

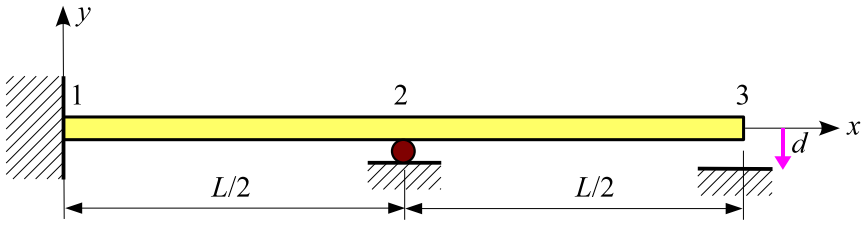
$$F_{2y} = -k\,v_2 = 12.571 \text{ kN}$$

6.5 Exemple 5 – déplacement d'appui

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite représentée sur la figure est encastrée en 1 et repose sur un appui simple en 2.



La poutre est rectangle plein de base B et de hauteur H.

Soit E le module de Young du matériau.

La poutre subit en 3 un déplacement vertical égal à d.

On donne :

$E = 100000$ MPa
$L = 10$ cm
$B = 10$ mm , $H = 1$ mm
$d = -1$ mm

Résultats :

Soit I_z est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe Gz.

On obtient :

– l'action de liaison en 3 est égale à :

$$F_{3y} = \frac{96\, E I_z\, d}{7\, L^3} = -1.14 \text{ N}$$

– la contrainte normale σ_{xx} est maximale dans la section 2 :

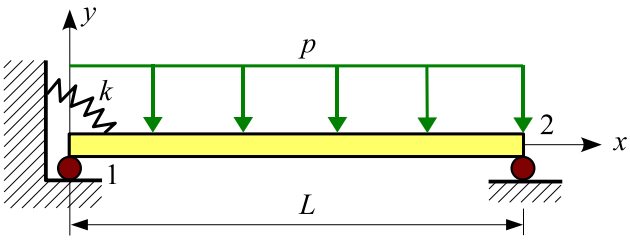
$$|\sigma_{xx}(L, H/2)| = \frac{24\, E d H}{7\, L^2} = 34.29 \text{ MPa}$$

6.6 Exemple 6 – appui élastique

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite $1-2$, de longueur L, repose sur un appui simple en 1 et 2. De plus, en 1 la liaison en rotation est élastique : $M_{1z} = -k\,\theta_{1z}$.



La poutre est un HEA 100.

Soit E le module de Young du matériau.

La poutre porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité p.

On donne :

$E = 200000$ MPa
$L = 0.9$ m
$k = 50$ kN.m/°
$p = -15$ kN/m

Résultats :

Soit I_z est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe z.

Posons $C = \dfrac{kL}{EI_z}$.

On obtient :

– déplacements nodaux :

$$\theta_{1z} = \frac{pL^3}{8\,EI_z\,(3+C)} = -0.016757^\circ \quad , \quad \theta_{2z} = -\frac{pL^3\,(6+C)}{48\,EI_z\,(3+C)} = 0.027067^\circ$$

– actions de liaison :

$$F_{1y} = -\frac{pL\,(12+5\,C)}{8\,(3+C)} = 7.681 \text{ kN} \quad , \quad M_{1z} = -k\,\theta_{1z} = 0.838 \text{ kN.m}$$

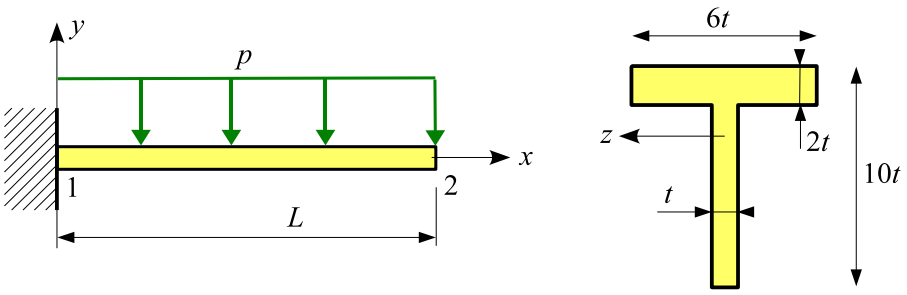
$$F_{2y} = -\frac{3\,pL\,(4+C)}{8\,(3+C)} = 5.819 \text{ kN}$$

6.7 Exemple 7 – poutre en T : déplacements et contraintes

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite $1-2$ de longueur L est encastrée en 1. La section droite est un T à ailes égales. Soit E le module de Young du matériau.



La poutre porte sur toute sa longueur une charge uniformément répartie d'intensité p.

On donne :

$$E = 200000 \text{ MPa} \ , \ L = 1 \text{ m} \ , \ t = 10 \text{ mm} \ , \ p = -1000 \text{ daN/m}$$

Résultats :

Le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe z est égal à :

$$I_z = \frac{500}{3}\, t^4 = 166.67 \text{ cm}^4$$

La contrainte normale dans la section 1 est égale à :

$$\sigma_{xx}(0, y) = -\frac{pL^2\, y}{2\, I_z} = -\frac{3\, pL^2 y}{1000\, t^4}$$

d'où :

– fibre supérieure : $\sigma_{xx}(0, 3\, t) = \dfrac{-9\, pL^2}{1000\, t^3} = 90 \text{ MPa}$

– fibre inférieure : $\sigma_{xx}(0, -7\, t) = \dfrac{21\, pL^2}{1000\, t^3} = -210 \text{ MPa}$

Les déplacements de la section 2 sont :

– flèche : $v_2 = \dfrac{pL^4}{8\, EI_z} = \dfrac{3\, pL^4}{4000\, E\, t^4} = -3.75 \text{ mm}$

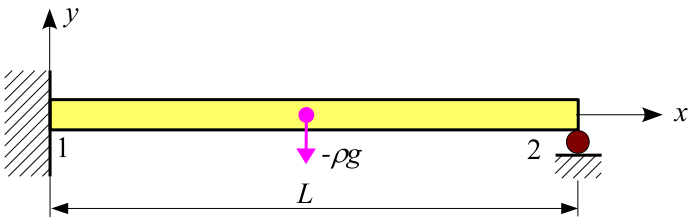
– pente : $\theta_{2z} = \dfrac{pL^3}{6\, EI_z} = \dfrac{pL^3}{1000\, E\, t^4} = -5\ 10^{-3} \text{ rad}$

6.8 Exemple 8 – dimensionnement d'une poutre soumise à son poids propre

Référence : *solution analytique.*

Données :

La poutre droite représentée sur la figure est encastrée en 1 et repose en 2 sur un appui simple. E, σ_E et ρ sont respectivement le module de Young E, la limite élastique et la masse volumique du matériau. Soit I_z le moment quadratique de la section droite. La poutre est soumise à son poids propre ; g est l'accélération de la pesanteur.



On donne :

$L = 10$ m , $E = 200000$ MPa , $\rho = 8000$ kg/m^3 , $\sigma_E = 250$ MPa , $g = 10$ m/s^2

La flèche maximale admissible est $d = 0.03$ m.

La section droite est un rond plein de diamètre D.

Résultats (menu optimiser) :

Activer le menu optimiser, modifier les limites admissibles en contrainte et en déplacement, puis lancer le calcul.

La force par unité de longueur est :

$$-p = -\rho g A = -\frac{\pi \rho g D^2}{4}$$

Dimensionnement en contrainte

Le moment fléchissant maximal est $pL^2/8$ d'où la contrainte maximale :

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_{xx}|) = \frac{pL^2}{8\,W_{\text{el.}z}}$$

On en déduit le dimensionnement en contrainte :

$$\sigma_{\max} = \frac{pL^2}{8\,W_{\text{el.}z}} < \sigma_E \qquad \text{avec} \quad W_{\text{el.}z} = \frac{\pi D^3}{32}$$

soit :

$$D > \frac{\rho g L^2}{\sigma_E}$$

d'où :

$$D > 32.00 \text{ mm}$$

Dimensionnement en déplacement

La flèche est :

$$v(x) = \frac{-px^2}{48\,EI_z}(3\,L^2 - 5\,Lx + 2\,x^2)$$

Elle est maximale pour :

$$x = \frac{1}{16}\,(15 - \sqrt{33})\,L = 0.57846\,L = 5.7846 \text{ m}$$

d'où :

$$v_{\max} = \max(|v(x)|) = 0.005416\,\frac{pL^4}{48\,EI_z}$$

On en déduit le dimensionnement en déplacement :

$$0.005416\,\frac{pL^4}{48\,EI_z} < d \qquad \text{avec} \quad I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

soit :

$$D^2 > 0.08666\,\frac{\rho g L^4}{Ed}$$

d'où :

$$D > 107.49 \text{ mm}$$